ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Interrogation écrite n°3

Février 2021
Solution

Exercice 1

Soit f la fonction qui à tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ associe le réel $e^{-x^2-y^2}$.

(1) • La fonction $(x,y)\mapsto -x^2-y^2$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
• La fonction exponentielle $t\mapsto e^t$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
☞ Par composition, f est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour chercher ses points critiques, on commence par former son gradient c'est à dire calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= -2xe^{-x^2-y^2}\\ \partial_2 f(x,y) &= -2ye^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

Et on peut écrire

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}-2xe^{-x^2-y^2}\\-2ye^{-x^2-y^2}\end{pmatrix}=-2e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

Ansi,

$$\begin{aligned}(x,y)\text{ point critique de } f &\iff \nabla f(x,y)=0\\ &\iff x=y=0\end{aligned}$$

et f n'admet qu'un unique point critique, de coordonnées $(0,0)$.

(2) Il faut former la matrice Hessienne au point critique, mais pour cela il faut calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1}f(x,y) &= -2e^{-x^2-y^2}-2x\left(-2xe^{-x^2-y^2}\right)\\ &= \left(4x^2-2\right)e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,2}f(x,y) &= 4xye^{-x^2-y^2}\\ &= \partial^2_{2,1}f(x,y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{2,2} f(x,y) &= -2e^{-x^2-y^2} - 2y\left(-2ye^{-x^2-y^2}\right) \\ &= \left(4y^2-2\right)e^{-x^2-y^2}\end{aligned}$$

Il suit donc que la matrice hessienne au point $(0,0)$ est donnée par

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est déja diagonale et ses valeurs propres sont strictement négatives, on peut donc conclure que f présente un maximum local en $(0,0)$, qui vaut $f(0,0)=1$.

En observant que, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $x^2+y^2\geq 0$ donc

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)} \leq e^0 = 1 = f(0,0),$$

on voit que ce maximum est en fait un maximum **global**.

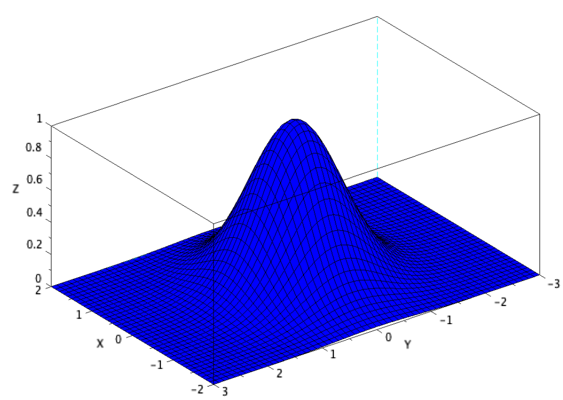
(3) (`SciLab`) On introduit la fonction suivante

```
function z=f(x,y)
    z=exp(-x^2-y^2)
endfunction
```

(a) On peut représenter cette surface à l'aide des commandes `plot3d( )` ou `fplot3d( )`. Plus précisément, en écrivant

```
x=[-2:0.1:2]; y=[-3:0.1:3];
fplot3d(x,y, f)
```

on obtient la figure ci-dessous



(b) La figure représente les *lignes de niveau* de la fonction f, sur $[-2,2]\times[-3;3]$, avec un pas de 0.05 et des valeurs entre 0 et 1. Il suffit pour l'obtenir de rajouter la commande

```
contour(x,y, f, 0:0.05:1)
```

On peut observer la présence d'un maximum (local) en $(0,0)$ qui vaut 1, ce qui est cohérent par rapport à l'étude précédente.

Exercice 2

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

(1) Pour une notation plus habituelle, écrivons $f(x,y) = 120x - 8x^2 + 4xy - 2y^2$. C'est une fonction polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) La question revient à chercher les points critiques de f. On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 120 - 16x + 4y \\ \\ \partial_2 f(x,y) &= 4x - 4y \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique de } f &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 16x - 4y &=& 120 \\ 4x - 4y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - y &=& 30 \\ x - y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = 10 \end{aligned}$$

Ainsi f n'admet qu'un seul point critique, de coordonnées $(10,10)$ et si f présente un extremum c'est nécessairement en ce point. Pour former la matrice hessienne de f, on commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x,y) &= -16 \\ \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) &= 4 \\ &= \partial^2_{2,1} f(x,y) \end{aligned}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = -4$$

Ainsi,

$$\nabla^2 f(10,10) = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(3) On admet ici[1] que si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2, alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1 \lambda_2 &=& ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 &=& a + d \end{array} \right.$$

[1]Mais dans la plupart des exercices il faut le redémontrer

Notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $M = \nabla^2 f(10,10)$ qui est bien diagonalisable (car symétrique), on a donc, d'après la remarque qui précède,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 & = & 48 \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & -20 \end{array}\right.$$

En particulier le produit des deux valeurs propres étant strictement positif, elles sont toutes deux de même signe, et leur somme étant négative, on peut affirmer que la hessienne admet donc deux valeurs propres strictement négatives. Ainsi, f présente un maximum local en $(10,10)$. Ce maximum vaut

$$f(10,10) = 600.$$

(4) On développe

$$\begin{array}{rcl} -2(y-x)^2 - 6(x-10)^2 & = & -2(y^2-2x+x^2) - 6(x^2-20x+100) \\ & = & -2y^2+4x-2x^2-6x^2+120x-600 \\ & = & -600+f(x,y) \\ & = & -f(10,10)+f(x,y) \end{array}$$

Or, il est clair que (combinaison de carrés avec coefficients négatifs), pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) - f(10,10) = -2(y-x)^2 - 6(x-10)^2 \leq 0$$

ou encore

$$f(x,y) \leq f(10,10).$$

Et le maximum local précédent est en fait un maximum global.

(5) Avec la contrainte $B+2N = 23$, le rendement n'est plus qu'une fonction d'une seule variable

$$\begin{array}{rcl} f(B,N) & = & f(23-2N,N) \\ & = & 120(23-2N) - 8(23-2N)^2 + 4(23-2N)N - 2N^2 \\ & = & g(N) \end{array}$$

g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$g'(N) = -240 + 32(23-2N) + 4(-2N+23-2N) - 4N = 12(3\times 23 - 20 - 7N) = 84(7-N)$$

Ainsi, g admet un maximum en $N = 7$, donc sous la contrainte $B = 23-2N$, f présente un maximum en $(23-2\times 7, 7) = (9,7)$ qui vaut $f(9,7) = 586$.

(6) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2. Par définition,

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } M & \Longleftrightarrow & M - \lambda I \text{ non inversible} \\ & \Longleftrightarrow & \det(M-\lambda-I) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \end{array}$$

Or, λ_1 et λ_2 sont valeur propres donc solutions de l'équation précédente et racines du polynôme correspondant. Par factorisation, on a donc

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc.$$

Par développement puis identification de polynômes, on a bien

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 & = & ad-bc \\ \lambda_1+\lambda_2 & = & a+d \end{array}\right.$$

Exercice 3***

Observant que la famille (V_1, V_2, V_3) est libre, elle forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}$ formée de vecteurs propres de A (qui est donc diagonalisable). En notant P la matrice de passage vers cette base, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

on doit avoir

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = D,$$

où les valeurs propres sur la diagonale peuvent éventuellement être égales. Un pivot de Gauss donne l'inverse de P. On trouve en effet

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \cdots & \cdots \\ \alpha-\gamma & \cdots & \cdots \\ \alpha-\beta & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ce qui impose notamment

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \alpha+\beta+\gamma & = & 3 \\ \alpha-\gamma & = & 3 \\ \alpha-\beta & = & 3 \end{array} \right.$$

ou encore $\alpha = 3$ et $\beta = \gamma = 0$. Connaissant complètement D, la suite du calcul permet d'obtenir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$