ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°1

Période du 08/09 au 18/09

Semaine du 08/09 au 11/09

Programme

- Révisions
- Exercices **non traités** de la feuille de révisions de rentrée ou du cahier de vacances

Questions de cours

Chaque étudiant.e devrai traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable.

(1) On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer H^2 puis, à l'aide de la formule du binôme, calculer $(I+aH)^n$ (où $a \in \mathbb{R}$).

(2) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}$.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire que, pour $p \in]0;1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

(4) Montrer que, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.

(5) Montrer rigoureusement que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Planche d'exercices

(1) (*) Soit A une matrice carrée vérifiant l'équation $A^2 - 5A + 6I = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A.

(2) (*) Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 5x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -x + 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

(3) (*/**) On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ v_0 &= -1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n\in\mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}$$

(a) On considère la suite (p_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$. Montrer que (p_n) est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

(b) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n.$$

(c) Montrer que la suite (z_n), définie pour tout n par $z_n = v_n/3^n$, est arithmétique. En déduire l'expression z_n en fonction de n puis celles de v_n et enfin de u_n en fonction de n.

(4) (**) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

(a) (**) À l'aide du changement de variable $u = 1+x^2$, calculer I_1.

(b) (*) Montrer que, pour tout $x\in[0;1]$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$.

(c) (*) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

puis conclure quant à la convergence de la suite (I_n).

(5) (**) On effectue des tirages **sans remise** d'une boule dans une urne contenant $N-1$ boules blanches et une boule noire. On note X le rang d'apparition de la boule noire. Montrer que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(⟦1;N⟧)$.

(6) (*) Montrer que la fonction f définie ci-après est une densité de probabilité, avec

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{si } -1\leq x\leq 1 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Préciser la fonction de répartition F_X d'une variable X ayant f pour densité. (On commencera par un dessin de la courbe de f.)

(7) (**) On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n. On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

(8) (***) Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne. et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ieme} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

(a) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.

(b) Pour $k\in\{1,\ldots,n\}$, déterminer la probabilité $P(Y=k)$, puis déterminer $P(Y=0)$.

(c) Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P(Y=k) = 1$.

(d) Pour $x\neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}.$$

(e) En déduire $E(Y)$.

Semaine du 15/09 au 18/09

Programme

- Révisions.
- **Chapitre 1**. Relations d'équivalence et de négligeabilité au voisinages de a. Développements limités.

Questions de cours

Chaque étudiant.e devrai traiter une de ces questions - choisie au hasard - au tableau. Il est donc nécessaire de les avoir préparées au préalable.

(1) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}$.

(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, on a $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. En déduire *en redémontrant* le résultat que, si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$), alors $E(X) = np$.

(3) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x+1$.

(4) Montrer rigoureusement que $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

(5) Énoncé de la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Développements limités usuels en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$, e^x et $1/(1+x)$.

(6) Une urne contient une boule bleue et 2 boules rouges. On tire une boule de l'urne et définit la v.a X qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si elle est bleue. Écrire en `SciLab` une fonction d'en-tête `function y=tirage()` qui simule la variable X.

Planche d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) (*) Comparer

$$(i)\ \sqrt{1+x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } +\infty; \qquad (ii)\ x \text{ et } \sqrt{x} \text{ en } 0; \qquad (iii) :\ \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$(iv)\ e^{1/x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } 0^+; \qquad (v)\ \ln(-x) \text{ et } e^{-x^2} \text{ en } -\infty;$$

$$(vi)\ e^x - 1 \text{ et } \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-1\right) \text{ en } 0; \qquad (vii)\ e^{2x} - e^x \text{ et } x(x+1) \text{ en } -1.$$

$$(viii)\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } ex \text{ en } +\infty.$$

(3) (*) Complétez les équivalents suivants :

$$(i)\ 1 - e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dots \qquad (ii)\ \ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots \qquad (iii)\ 1-(1-e^{-x})^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots$$

$$(iv)\ \frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (v)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (vi)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to -1}{\sim} \dots$$

(4) (*) Déterminer un DL à l'ordre 2 au point indiqué

$$(i)\ e^{x^2+x} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ \ln(1+e^x) \text{ en } 0; \qquad (iii)\ (x+1)\sqrt{x+1}-1 \text{ en } 0;$$
$$(iv)\ e^{\sqrt{x}} \text{ en } 1; \qquad (v)\ \left(\ln(1+x)\right)^2 \text{ en } 0; \qquad (vi)\ x^2-2x-1 \text{ en } 1.$$

(5) (*/**) Déterminer un DL d'ordre 2 et en déduire la position relative de la courbe et de la tangente au point considéré

$$(i)\ x \mapsto \frac{e^x+2}{\sqrt{1+x}} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ x \mapsto (x+1)^{1/3}-(1-x)^{1/3} \text{ en } 0; \qquad (iii)\ x \mapsto x^2+x+1 \text{ en } 1.$$

(6) (*/**) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Est-elle dérivable en 0?

(7) (**/***) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{e^x+1} + nx$.

(a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(b) Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$. En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n, dont on précisera les équations.
(c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion A_n et préciser l'équation de la tangente en ce point.
(d) Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f_n(x)$ au point d'inflexion?

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(a) Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\dfrac{1}{1+x}$.
(b) En constatant que

$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{2}\right)},$$

et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.