ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°2

Période du 22/09 au 02/10

Semaine du 22/09 au 25/09

Programme

- **Chapitre 1.** Intégralité.
- **Chapitre 2.** Notion de combinaison linéaire, famille libre, famille génératrice.

Question(s) de cours

(1) Énoncé de la formule de Taylor-Young en 0 à l'ordre 2 pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0. Développements limités usuels en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$, e^x et $1/(1+x)$.

(2) Montrer que la fonction f est continue puis dérivable en 0, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(3) (**) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad n \to +\infty.$$

(4) Une urne contient une boule bleue et 2 boules rouges. On tire une boule de l'urne et définit la v.a X qui vaut 1 si la boule tirée est rouge et 0 si elle est bleue. Écrire en `SciLab` une fonction d'en-tête `function y=tirage()` qui simule la variable X.

(5) Montrer que, dans $\mathbb{R}_2[X]$, le polynôme X^2+1 est combinaison linéaire des polynômes $1, X-1, (X-1)^2$.

Planche d'exercices

(1) (*) Comparer

$$(i)\ \sqrt{1+x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } +\infty; \qquad (ii)\ x \text{ et } \sqrt{x} \text{ en } 0; \qquad (iii) : \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$(iv)\ e^{1/x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } 0^+; \qquad (v)\ \ln(-x) \text{ et } e^{-x^2} \text{ en } -\infty;$$

$$(vi)\ e^x - 1 \text{ et } \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-1\right) \text{ en } 0; \qquad (vii)\ e^{2x} - e^x \text{ et } x(x+1) \text{ en } -1.$$

$$(viii)\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } ex \text{ en } +\infty.$$

(2) (*) Complétez les équivalents suivants :

$$(i)\ 1-e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dots \qquad (ii)\ \ln(1+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots \qquad (iii)\ 1-(1-e^{-x})^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \dots$$

$$(iv)\ \frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (v)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (vi)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to -1}{\sim} \dots$$

(3) (*) Déterminer un DL à l'ordre 2 au point indiqué

$$(i)\ e^{x^2+x} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ \ln(1+e^x) \text{ en } 0; \qquad (iii)\ (x+1)\sqrt{x+1}-1 \text{ en } 0;$$

$$(iv)\ e^{\sqrt{x}} \text{ en } 1; \qquad (v)\ (\ln(1+x))^2 \text{ en } 0; \qquad (vi)\ x^2-2x-1 \text{ en } 1.$$

(4) (*) Déterminer un DL d'ordre 2 et en déduire la position relative de la courbe et de la tangente au point considéré

$$(i)\ x \mapsto \frac{e^x+2}{\sqrt{1+x}} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ x \mapsto (x+1)^{1/3}-(1-x)^{1/3} \text{ en } 0; \qquad (iii)\ x \mapsto x^2+x+1 \text{ en } 1.$$

(5) (**) Soit f la fonction définie sur $[-1;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}.$$

(a) Déterminer le développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0 puis en déduire le développement limité de f à l'ordre 1 au voisinage de 0.
(b) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
(c) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0.

(6) (*) Comparer, dans chaque cas, les suites (u_n) et (v_n):

$$\begin{array}{ll}
(i) & u_n = e^{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = e^{n-1} \\
(ii) & u_n = \ln(n)e^n \quad \text{et} \quad v_n = e^n n^{n/2} \\
(iii) & u_n = \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{1}{e^n}+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{\ln(n)} \\
(iv) & u_n = \dfrac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt{n} \\
(v) & u_n = \dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{2}{n^2}
\end{array}$$

(7) (*) À l'aide d'un équivalent, donner la limite des suites suivantes

$$(i)\ n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right); \qquad (ii)\ \ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \qquad (iii)\ \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln(n)}.$$

(8) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq \frac{u_n}{n+5} \leq 2+\frac{1}{n^2}$$

(9) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) telle que $(n-1)u_n+e^n$ converge vers 2.

(10) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant

$$1-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2) = \frac{n-1}{n}.$$

(11) (*) À l'aide d'un DL judicieusement choisi, montrer que

$$(i)\ \sqrt{1+n^2} \sim n + \frac{1}{2n}; \qquad (ii)\ \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n} + \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}};$$

$$(iii)\ n^{1/n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln(n)^2}{2n^2} + o\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right);$$

$$(iv)\ \ln\left(1 + n\left(e^{1/n^2} - 1\right)\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(12) (***) Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel $\ell \neq 0$. Montrer que $u_{n+1} \sim u_n$. Est-ce toujours vrai si $\ell = 0$?

(13) (***) Soit $\alpha > 0$. Le but de l'exercice est de trouver un équivalent de u_n, où

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha.$$

(a) Quelle est la nature de la suite (u_n)?
(b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$n^{\alpha+1} - (n-1)^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)n^\alpha \leq (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1}.$$

(c) En déduire que

$$n^{\alpha+1} \leq (\alpha+1)u_n \leq (n+1)^{\alpha+1} - 1.$$

(d) Conclure.

(14) (***) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(1) = 1 \ \text{ et } \ f(x) = \frac{(x+1)\ln(x)}{2(x-1)} \ \text{ si } \ x \neq 1.$$

(a) Montrer que f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.
(b) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
Étudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
(c) Montrer que pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}.$$

(d) Montrer que f est dérivable au point 1 et que $f'(1) = 0$.
(e) Montrer que f' est continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
(f) Montrer que, pour tout $x > 1$, on a : $\ln(x) < (x-1)$. En déduire que, pour tout $x > 1$, on a : $f(x) < x$.
(g) Donner la représentation graphique de la fonction f .
(h) Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0 = a$ et, pour tout entier $n \geq 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
  (i) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et que pour tout $n \geq 0$, $x_n > 1$.
  (ii) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite ℓ que l'on précisera.

(15) (*) Écrire sous forme de Vect$(\cdot)$ les sous-espaces (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) d'équation $MX = 0$ et $MX = X$, où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Semaine du 29/09 au 02/10

Programme

- Reprise du **DS 1**.
- **Chapitre 2.** Intégralité.

Question(s) de cours

(1) (**) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}, \quad n \to +\infty.$$

(2) Soit $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_k)$ une famille de k vecteurs d'un espace vectoriel E. Caractérisation de $\mathcal{F}$ libre.

(3) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ défini ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & a+b \end{pmatrix} : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

et en fournir une base. Quelle est sa dimension?

(4) Montrer que la famille $(1, X-1, (X-1)^2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Planche d'exercices

(1) (*) Écrire sous forme de Vect$(\cdot)$ les sous-espaces (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) d'équation $MX = 0$ et $MX = X$, où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) (*) Montrer **de deux façons** que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels et en exhiber une famille génératrice

$$(i) \qquad F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ -a & 0 & b \\ b+c & c & 0 \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$(ii) \qquad G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ \begin{cases} x - y - t &= 0 \\ x + y &= 0 \\ z - 2t &= 0 \end{cases} \right\}$$

$$(iii) \qquad H = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}.$$

$$(iv) \qquad J = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] : \ X^2 P' - 2P = 0 \right\}$$

(3) (*) Déterminer si les familles suivantes, dans les espaces considérés, sont libres, si elles sont génératrices et si elles forment des bases de l'espace.

$$(i) \qquad \big(X+1, X^2+1, X^3+1\big) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_3[X]$$

$$(ii) \qquad ((3,2,1),(1,2,2),(0,1,1)) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$(iv) \qquad (X, X^2, 2X) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_2[X]$$

$$(v) \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

(4) (**) Si A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle commutant de A, le sous-ensemble suivant, noté $C(A)$:

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) : \ AM - MA = 0\}$$

(a) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.
(b) Dans cette question, $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $C(A)$ ainsi que sa dimension.

(5) (**) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (-1, 2, 0), \quad v = (3, -5, -1), \quad w = (0, 1, -2).$$

Expliciter les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette nouvelle base.

(6) (**) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \ P(a) = 0\}$. Démontrer que $\mathcal{B} = \big((X-a)X^k\big)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de F_a. Quelle est la dimension de F_a? Donner les coordonnées de $(X-a)^n$ dans cette base.

(7) (***) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

(8) (**D'après **EDHEC 2009**) On considère l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que l'on admet être un espace vectoriel et on introduite

$$F = \{u \in E : \ u'' - 5u' = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
(b) Soit $u \in F$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = u'(x)e^{-5x}$ est constante.
(c) En déduire que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et $u_2(x) = e^{5x}$.
(d) Quelle est la dimension de F?

(9) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On introduit les deux sous-ensembles F et G composés respectivement des fonctions paires et impaires.
(a) (**) Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E.
(b) (**) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
(c) (***) Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $\varphi = f + g$..
(d) (***) Montrer que les fonctions f et g précédemment trouvées sont uniques. *On dira que E est somme directe de F et G, ce qui s'écrit $E = F \oplus G$.*