ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°3

Période du 06/10 au 16/10

Semaine du 06/10 au 09/10

Programme

- **Chapitre 2.** Intégralité.
- **Chapitre 3.** Intégralité.

Question(s) de cours

(1) Définition de la dimension d'un espace vectoriel. Liens entre inclusion de sous-espaces et dimension.

(2) Montrer que l'ensemble F ci-dessous est un espace vectoriel et en déterminer une base,

$$F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ AM = MA\}, \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ avec $M^3 = 0$ et $M^2 \neq 0$. Montrer que (I, M, M^2) est une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(4) Soit f une fonction croissante sur un intervalle $[a; b]$ avec $f([a; b]) \subset [a; b]$ et $f(x) \leq x$ sur $[a; b]$. Que dire de la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a; b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$?

Planche d'exercices

(1) (*) Montrer **de deux façons** que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels et en exhiber une famille génératrice

$$(i) \qquad F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ -a & 0 & b \\ b+c & c & 0 \end{pmatrix}, \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$(ii) \qquad G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x - y - t & = & 0 \\ x + y & = & 0 \\ z - 2t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$(iii) \qquad H = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}.$$

$$(iv) \qquad J = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] : \ X^2 P' - 2P = 0 \right\}$$

(2) (*) Déterminer si les familles suivantes, dans les espaces considérés, sont libres, si elles sont génératrices et si elles forment des bases de l'espace.

$$(i) \qquad \left(X+1, X^2+1, X^3+1\right) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_3[X]$$

$$(ii) \qquad ((3,2,1),(1,2,2),(0,1,1)) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$(iv) \qquad (X, X^2, 2X) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_2[X]$$

$$(v) \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

(3) (**) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (-1, 2, 0), \quad v = (3, -5, -1), \quad w = (0, 1, -2).$$

Expliciter les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette nouvelle base.

(4) (**) On note E l'ensemble

$$E = \left\{ M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) : \; M = \begin{pmatrix} a & c & d & b \\ b & a & c & d \\ d & b & a & c \\ c & d & b & a \end{pmatrix}, \; (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Montrer que E est un espace vectoriel, en exhiber une famille génératrice, puis une base et en déduire sa dimension.

(5) (**) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \; P(a) = 0\}$. Démontrer que $\mathcal{B} = \left((X-a)X^k\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de F_a. Quelle est la dimension de F_a? Donner les coordonnées de $(X-a)^n$ dans cette base.

(6) (***) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

(7) (**D'après **EDHEC 2009**) On considère l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que l'on admet être un espace vectoriel et on introduite

$$F = \{u \in E : \; u'' - 5u' = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
(b) Soit $u \in F$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = u'(x)e^{-5x}$ est constante.
(c) En déduire que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et $u_2(x) = e^{5x}$.
(d) Quelle est la dimension de F?

(8) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On introduit les deux sous-ensembles F et G composés respectivement des fonctions paires et impaires.
(a) (**) Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E.
(b) (**) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
(c) (***) Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $\varphi = f + g$..
(d) (***) Montrer que les fonctions f et g précédemment trouvées sont uniques. *On dira que E est somme directe de F et G, ce qui s'écrit $E = F \oplus G$.*

(9) Soient f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \geq 0$.

(a) Montrer que $f([1;3]) \subset [1;3]$.

(b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.

(c) Montrer que, pour tout $x \in [1;3]$, on a
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n - \alpha|.$$

(e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).

(g) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche une approximation de α à ε près, où ε est entré par l'utilisateur.

(10) On considère, pour $n \geq 3$, l'équation
$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

(a) On introduit la fonction $f_n :\ x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?

(b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,
$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer que (x_n) est croissante.

(d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

(e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.

(f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

Semaine du 13/10 au 16/10

Programme

- **Chapitres 3 & 4.**

Questions de cours

(1) Soit f une fonction croissante sur un intervalle $[a;b]$ avec $f([a;b]) \subset [a;b]$ et $f(x) \leq x$ sur $[a;b]$. Que dire de la suite (u_n) définie par $u_0 \in [a;b]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$?

(2) Énoncer tous les critères de comparaisons pour des série à termes positifs.

(3) On considère la série harmonique dont on note (H_n) la suite des sommes partielles. Quelle est sa nature?

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

(b) En déduire un équivalent de H_n, lorsque $n \to +\infty$.

Exercices incontournables

(1) Soient f la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0\geq 0$.

(a) Montrer que $f([1;3])\subset[1;3]$.

(b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.

(c) Montrer que, pour tout $x\in[1;3]$, on a
$$|f'(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(d) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n-\alpha|.$$

(e) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n|u_0-\alpha|.$$

(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).

(g) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche une approximation de α à ε près, où ε est entré par l'utilisateur.

(2) On considère, pour $n\geq 3$, l'équation
$$(E_n)\qquad x^n+x^2+2x-1=0.$$

(a) On introduit la fonction $f_n:\ x\mapsto x^2+x^2+2x-1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?

(b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n\geq 3$,
$$0<x_n<\frac{1}{2}.$$

(c) Montrer que (x_n) est croissante.

(d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.

(e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.

(f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

Planche d'exercices

(1) (*) Montrer que l'équation $x^{3n}+n^nx^n-1=0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n<1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

(2) (**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que
$$f(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x>0$, calculer $f'(x)$.

(b) Établir pour tout réel $x\geq 1$, l'inégalité $f(x)\geq e\ln x$.

(c) En déduire $\lim_{x\to+\infty}f(x)$.

(d) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité $f(x)\leq e^x\ln x$.

(e) En déduire $\lim_{x\to 0^+}f(x)$.

(f) Dresser le tableau de variation de f.

(g) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

(i) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.

(ii) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.
(iii) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

(h) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant
$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t = n.$$
(i) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
(j) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

(3) (**/***) Soit $f:\ x\mapsto 1-x^2$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
(b) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0;1]$.
(c) Montrer, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$, que
$$u_{2n+1}\leq u_{2n-1}\leq u_{2n}\leq u_{2n+2}.$$
(d) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites convergentes.
(e) Montrer que (u_n) diverge.

(4) (**/***D'après ORAL **HEC 2013**, SP) Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f_n(x) = x+1-\frac{e^x}{n}.$$
(a) Montrer que l'équation $f_n(x)$ admet une unique solution strictement négative, notée x_n.
(b) Montrer que (x_n) est décroissante et convergente.
(c) Déterminer la limite ℓ de (x_n).
(d) On pose $y_n = x_n-\ell$. Déterminer un équivalent de y_n.

(5) (*) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(6) (*) Montrer que
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(7) (*/**) Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, où
$$w_n = 2^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{4^k}{k!}.$$

(8) (**) **Une erreur classique**.
(a) Montrer que $\sum\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ converge (absolument).
(b) Montrer, à l'aide de suites adjacentes, que $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
(c) Montrer que
$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$
(d) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.
(e) Expliquer le titre de l'exercice.