ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°4

Période du 20/10 au 23/10 et du 10/11 au 13/11

Semaine du 20/10 au 23/10

Programme

- **Chapitre 4.** Intégralité.
- **Chapitre 5.** Notion d'application linéaire. Noyau. Image. Théorème du rang.

Questions de cours

(1) On considère la série harmonique dont on note (H_n) la suite des sommes partielles. Quelle est sa nature?
  (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$
  (b) En déduire un équivalent de H_n, lorsque $n \to +\infty$.

(2) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function S=serie(n)` qui renvoie la liste S des n premières sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$. Donner les instructions permettant de représenter ensuite graphiquement les 100 premieres sommes partielles.

(3) Soit Φ une application linéaire de E dans F. Définition de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

(4) Enoncé du théorème du rang. Conséquences (chaîne d'équivalences) dans le cas particulier d'un endomorphisme de E (avec $n = \dim(E)$).

Planche d'exercices

(1) (*) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(2) (*) Montrer que
$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(3) (**) On veut déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles la série de terme général u_n converge, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

(a) Montrer que

$$\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x \leq \sqrt{1}+\sqrt{2}+...+\sqrt{n} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire un équivalent du numérateur de u_n, puis de u_n.
(c) Conclure.

(4) (**/***D'après **EDHEC 1997**) Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}},$$

où p désigne un entier naturel fixé.

(a) Montrer que si $p=0$ ou si $p=1$ la série de terme général u_n diverge.

☞ On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

(c) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1-(n+p+1)\, u_{n+1}\right)$$

(d) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.
(e) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.
(f) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que la série de terme général $u_n$converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.
(g) On suppose dans cette question que $\ell \neq 0$. Montrer que

$$u_n \sim \frac{\ell}{n}, \qquad n \to +\infty.$$

En déduire une contradiction.
(h) Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

(5) On considère l'application linéaire $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \to & (2x+y+z, x+y+t, x+z-t) \end{array}$.

(a) Déterminer une base du noyau de g.
(b) En déduire une base l'image de g.

(6) E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f_a)$.
(b) Montrer qu'une base de $\mathrm{Ker}\,(f_a)$ est $(e_2,\ e_1 - e_3)$.

(7) Montrer que les applications suivantes sont des automorphismes

(*i*) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \to & (x-t, y+z, y-z, x+t) \end{array}$, (*ii*) $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \to & P+P' \end{array}$

(8) On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$$

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Soit $P \in \mathbb{R}_0[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?
(c) Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?
(d) Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f.
(e) Déterminer une base du noyau de f.

(9) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.
(a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
(c) Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.

Semaine du 09/11 au 13/11

Programme

- **Chapitre 5.** Intégralité.
- Révisions Intégration sur un segment.

Questions de cours

(1) Soit Φ une application linéaire de E dans F. Définition de $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et de $\mathrm{Im}(\Phi)$.

(2) Énoncé du théorème du rang. Conséquences (chaîne d'équivalences) dans le cas particulier d'un endomorphisme de E (avec $n = \dim(E)$).

(3) Soient f un endomorphisme d'un espace vectoriel E, A la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$, T la matrice de f la base $\mathcal{C} = (v_1, ..., v_n)$. Donner la formule de changement de base et la définition de matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{C}$.

(4) Théorème fondamental de l'analyse.
Application: montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ et expliciter la dérivée de la fonction

$$F: \ x \in [1; +\infty[\longmapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 1

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

(1) (a) Déterminer $(A - I)^2$.
(b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.

(2) On pose $A = N + I$.
(a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.

(b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.

(3) On pose $u_1 = (A - I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
(a) Montrer que l'ensemble $E_1 = \{X \in E : (A-I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que (u_1, u_2) en est une base.
(b) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) On note T la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de Au_1, Au_2 et Ae_1 dans la base (u_1, u_2, e_1). Expliciter T.

(4) Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.

(5) On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.

(a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
(b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :

$$NA = AN \iff (P^{-1}NP)T = T(P^{-1}NP)$$

(c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :

$$(P(E_{1,1} + E_{3,3})P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}).$$

Exercice 2*

Soit $\alpha > 0$. On considère les fonctions f_1 et f_2, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f_1(x) = e^{\alpha x}, \qquad f_2(x) = xe^{\alpha x},$$

on note E l'espace vectoriel $E = \text{Vect}(f_1, f_2)$ (E est donc un sous-espace vectoriel est de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$) et Δ l'endomorphisme de E défini par

$$\Delta : g \longmapsto g'.$$

(1) Vérifier que (f_1, f_2) est libre et forme bien une base de E.
(2) Quelle est la matrice, que l'on notera A, de Δ dans cette base ?
(3) L'endomorphisme Δ est-il un automorphisme?
(4) Calculer A^2 puis A^3. Conjecturer une formule pour A^n (pour $n \in \mathbb{N}^*$) que l'on démontrera par récurrence.
(5) En déduire les expression de $f_1^{(n)}(x)$ et $f_2^{(n)}(x)$.

Intégration

(1) À l'aide d'une - ou plusieurs - intégration(s) par parties (successives), calculer

$$(i)\ \int_1^2 (\ln(x))^2 \mathrm{d}x, \quad (ii)\ \int_0^T x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(2) (a) Vérifier que

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

(b) À l'aide d'une intégration par parties et de la question précédente, calculer

$$\int_{1/2}^{1} \frac{x\ln(x)}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x.$$

(3) À l'aide du changement de variables $u = 3x+1$, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 x\sqrt{3x+1}\mathrm{d}x.$$

(4) À l'aide du changement de variables $u = \ln(t)$, calculer l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}}.$$

(5) À l'aide du changement de variables $x = \sqrt{t^2+1}$, calculer l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\left(t^2+\sqrt{t^2+1}\right)^2}{\sqrt{t^2+1}} t\mathrm{d}t.$$

(6) Calculer les intégrales suivantes

$$(i)\ \int_{-2}^{-1} \frac{x-1}{\sqrt{x(x-2)}}\mathrm{d}x, \qquad (ii)\ \int_3^4 \frac{1}{x\ln(x^2)}\mathrm{d}x, \qquad (iii)\ \int_0^1 (3x-1)(3x^2-2x+3)^3\mathrm{d}x,$$

$$(iv)\ \int_1^2 xe^{-\frac{3}{2}x^2}\mathrm{d}x, \qquad (v)\ \int_{-1}^1 \frac{t}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad (vi)\ \int_0^a e^{-x}\left(1-e^{-x}\right)^2\mathrm{d}x,$$

$$(vii)\ \int_1^2 \frac{3t}{(t^2+1)\sqrt{t^2+1}}\mathrm{d}t, \qquad (viii)\ \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^{e^x+x}\mathrm{d}x$$