ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°5

Période du 16/11 au 27/11

Semaine du 16/11 au 20/11

Programme

- **Chapitre 6.** Intégralité.

Questions de cours

(1) Théorème fondamental de l'analyse.
Application: montrer le caractère $\mathcal{C}^1$ et expliciter la dérivée de la fonction

$$F: \ x \in [1;+\infty[\longmapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(2) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente. Calculer I_0.
(b) Montrer, à l'aide d'une IPP, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire que $I_n = n!$.

(3) En admettant que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi},$$

calculer soigneusement, à l'aide d'un changement de variable affine, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Planche d'exercices

(1) Étudier la nature et, si possible, calculer les intégrales ci-dessous

$$(i) \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x^2/5}}{5}\mathrm{d}x, \qquad (ii) \int_3^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}, \qquad (iii) \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{2\sqrt{t-1}}.$$

(2) À l'aide d'intégrations par parties **réalisées scrupuleusement**, montrer la convergence et calculer les valeurs des intégrales

$$(i) \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t, \qquad (ii) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

(3) À l'aide de changements de variables, déterminer la nature des intégrales

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad (u=\sqrt{t}), \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-\sqrt{t}}\mathrm{d}t \quad (u=\sqrt{1-t}).$$

(4) Justifier de la convergence et calculer les intégrales ci-dessous avec le changement de variable proposé

$$(i)\ \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{en posant } u=\sqrt{1+x^2}, \quad \left(\textit{indication: } \frac{1}{u^2-1}=\frac{1}{2(u-1)}-\frac{1}{2(u+1)}\right)$$

$$(ii)\ \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \qquad \text{en posant } u=\sqrt{t}, \quad (\textit{indication: IPP successives}).$$

(5) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x)=\int_0^x e^{t^2}\mathrm{d}t.$$

(a) Prouver que G est une fonction impaire.
(b) Déterminer le signe de G sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que

$$\forall\, x \in [0,+\infty[, \quad G(x) \geq \frac{x^3}{3}.$$

(d) En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
(e) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x, une expression de sa dérivée $G'(x)$.
(f) Construire le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que la valeur en 0.
(g) Étudier la convexité de G.
(h) Donner l'allure de la courbe représentative de G en précisant la tangente en 0.

(6) (***) Montrer, après justifié la convergence de l'intégrale, que

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-x}}{x}, \qquad x \to +\infty.$$

(7) Après avoir justifié la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2},$$

justifier la convergence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2(1+|x|)^2}.$$

(8) (a) Justifier de la convergence de l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
(b) À l'aide du changement de variable $u=1/t$, montrer que $I=0$.

(9) Soit f la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$
(a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
(b) Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x<y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$ puis en déduire le sens de variation de f.
(c) On admet que f est une fonction continue sur son ensemble de définition.
Déterminer $f(x)+f(x+1)$ pour $x>0$.
En déduire la limite de f en 0 et en $+\infty$.

Semaine du 23/11 au 27/11

Programme

- **Chapitre 6.** Intégralité.
- **Chapitre 7.** Couples de v.a, lois marginales, lois conditionnelles.

Questions de cours

(1) On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, les intégrales
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t.$$
 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n est une intégrale convergente. Calculer I_0.
 (b) Montrer, à l'aide d'une IPP, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$. En déduire que $I_n = n!$.

(2) En admettant que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t = \sqrt{2\pi},$$
calculer soigneusement, à l'aide d'un changement de variable affine, la valeur de
$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

(3) Soient X une loi de Poisson $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et, sachant $[X = n]$, Y une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$.

Planche d'exercices

(1) **Tous les exercices d'intégration de la semaine précédente**

(2) On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.
 (a) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$.
 (b) Déterminer la loi du couple (X, Y)
 (c) Calculer $P(X = Y)$
 (d) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

(3) On considère une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3. On effectue dans cette urne des tirages **avec remise** et on introduit la v.a. Y correspondant au nombre de tirages effectués avant d'obtenir deux tirages successifs distincts.
 (a) Déterminer la loi de Y.
 (b) Calculer $E(Y)$ puis $V(Y)$.

On note alors Z la v.a. correspondants au nombre de tirages nécessaires avant l'obtention des trois jetons consécutivement.

 (a) Montrer que la loi conditionnelle de Z sachant $Y = k$ est donnée par
$$P_{(Y=k)}(Z = j) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-k-1}, & \text{si } 2 \leq k < j \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$
 (b) Déterminer la loi du couple (Y, Z).
 (c) En déduire la loi de Z.