ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°6

Période du 30/11 au 04/12 et du 14/12 au 18/12

Semaine du 30/11 au 04/12

Programme

- **Chapitre 7.** Intégralité.
- **Chapitre 8.** Variables à densité. Espérance. Variance. Théorème de transfert. Pas de lois usuelles.
- Reprise du **DS n°2**

Exercices

(1) Montrer que si, sachant $[X = n]$ (où $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$), Z est une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ alors, Z suit une loi de Poisson de paramètre λp.

(2) On considère une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3. On effectue dans cette urne des tirages **avec remise** et on introduit la v.a. Y correspondant au nombre de tirages effectués avant d'obtenir deux tirages successifs distincts.
 (a) Déterminer la loi de Y.
 (b) Calculer $E(Y)$ puis $V(Y)$.

On note alors Z la v.a. correspondants au nombre de tirages nécessaires avant l'obtention des trois jetons consécutivement.

 (a) Montrer que la loi conditionnelle de Z sachant $Y = k$ est donnée par
$$P_{(Y=k)}(Z = j) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-k-1}, & \text{si } 2 \leq k < j \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$
 (b) Déterminer la loi du couple (Y, Z).
 (c) En déduire la loi de Z.

(3) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilité et telles que
$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = P(Y = i) = \frac{1}{2^i}.$$
 (a) Reconnaître les lois de X et Y.
 (b) Déterminer la loi de $Z = X + Y$ ainsi que la loi de X conditionnellement à $[Z = k], k \geq 2$.
 (c) Calculer $P(X = Y)$ et $P(X > Y)$.
 (d) Calculer $P(X \geq 2Y)$ et $P_{[X>Y]}(X \geq 2Y)$.

(4) Une urne contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne. On note X le plus petit numéro des 2 et Y le plus grand.

(a) Compléter le tableau suivant donnant la loi conjointe du couple (X, Y).

$X\backslash Y$	1	2	3	4
1	0	1/6		
2				
3				
4				

(b) En déduire les loi marginales de X et Y, puis $E(X)$ et $E(Y)$.
(c) Calculer à partir du tableau de la loi conjointe $E(XY)$.
(d) En déduire $\operatorname{cov}(X, Y)$.
(e) On note S la variable aléatoire égale à la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$ sans passer par la loi de S.

(5) (*)

(a) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

(b) Même question pour $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - (1-x)^{\alpha} & \text{si } \ x \in [0; 1[\\ 1 & \text{si } \ x \geq 1 \end{cases}.$

(6) (*) Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité puis déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire associée à cette densité.

$(i)\ f(t) = \dfrac{ae^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*)$, $\qquad (ii)\ g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } \ -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

(7) (****EML 2015**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.
On note T_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité.
(b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^3 f_n(x)$.
(c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.
(d) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1.
(e) (i) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$$

(ii) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

(iii) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Semaine du 14/12 au 18/12

Programme

- Reprise du Concours Blanc. Sujets A et B.
- **Chapitre 8.** Variables à densité.

Questions de cours

(1) Donner l'expression de la fonction de répartition et d'une densité puis de l'espérance et de la variance pour les trois lois usuelles : uniforme $\mathcal{U}([a;b])$, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

(2) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1])$. Montrer que

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

(3) Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. Montrer que $T = \max(X,Y,Z)$ est une variable à densité et en expliciter une densité.

Exercices

(1) Dessiner une fonction f telle que
- $f(3) = 2$;
- f est affine par morceaux mais f continue partout sur $\mathbb{R}$
- f densité de probabilité

(2) Vérifier que la fonction f suivante est une densité de probabilité. En notant X une variable aléatoire ayant f pour densité, expliciter la fonction de répartition F_X de X. La variable X admet-elle une espérance ?

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{5}{6(x+1)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(3) On considère la fonction φ définie, pour $x > 0$, par $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

(a) (i) Étudier la fonction φ. On représentera le tableau de variations incluant les limites au bord de l'ensemble de définition.

(ii) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.

(b) On introduit maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(i) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

(ii) Montrer que f est une densité de probabilité. On note X une v.a ayant f pour densité. Montrer que X admet une espérance. Qu'en est-il de la variance?

(iii) Montrer que, pour tout $x > \alpha$,

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

(iv) En déduire, en fonction de α, la valeur de $E(X)$.

(4) **(Extrait CB3 A)**. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

(a) Vérifier que la fonction f est paire.
(b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

(a) Déterminer la fonction de répartition de X.
(b) (i) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge.
(ii) En déduire, soigneusement, que X admet une espérance et que $E(X) = 0$.