ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°7

Période du 07/01 au 15/01

Semaine du 07/01 au 11/01

Programme

- **Chapitre 8.** Variables à densité.
- Révisions d'Algèbre Linéaire

Questions de cours

(1) Donner l'expression de la fonction de répartition et d'une densité puis de l'espérance et de la variance pour les trois lois usuelles : uniforme $\mathcal{U}([a;b])$, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

(2) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0;1])$. Montrer que

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda).$$

(3) Soient X, Y, Z trois variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme $\mathcal{U}([0;1])$. Montrer que $T = \max(X,Y,Z)$ est une variable à densité et en expliciter une densité.

Exercices

(1) Vérifier que la fonction f suivante est une densité de probabilité. En notant X une variable aléatoire ayant f pour densité, expliciter la fonction de répartition F_X de X. La variable X admet-elle une espérance ?

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x+1}{3}, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{5}{6(x+1)^2}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(2) On considère la fonction φ définie, pour $x > 0$, par $\varphi(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

(a) (i) Étudier la fonction φ. On représentera le tableau de variations incluant les limites au bord de l'ensemble de définition.

(ii) Montrer que l'équation $\varphi(x) = -1$ admet une unique solution α et que $1/3 < \alpha < 1/2$.

(b) On introduit maintenant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < \alpha \\ \dfrac{1}{x^2(x+1)}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(i) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+1}.$$

(ii) Montrer que f est une densité de probabilité. On note X une v.a ayant f pour densité. Montrer que X admet une espérance. Qu'en est-il de la variance?

(iii) Montrer que, pour tout $x > \alpha$,

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

(iv) En déduire, en fonction de α, la valeur de $E(X)$.

(3) **(Extrait CB3 A)**. On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $\mathbb{R}$, par

$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

(a) Vérifier que la fonction f est paire.

(b) Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

(c) Déterminer la fonction de répartition de X.

(d) (i) Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t$ converge.

(ii) En déduire, soigneusement, que X admet une espérance et que $E(X) = 0$.

(4) On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les 3 valeurs de λ telles que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.
Pour chacune de ces valeurs, résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

(c) On note D la matrice définie par $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ En déduire une expression explicite de A^n en fonction de n.

Semaine du 12/01 au 15/01

Programme

- Révisions Algèbre Linéaire
- Premières définitions du Chapitre 9 (Valeurs propres, vecteurs propres, spectre, sous-espace propre).

Selection d'exercices

(1) On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Trouver les 3 valeurs de λ telles que $A - \lambda I$ ne soit pas inversible.
Pour chacune de ces valeurs, résoudre le système $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(c) On note D la matrice définie par $D = P^{-1}AP$. Montrer que D est une matrice diagonale.
(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ En déduire une expression explicite de A^n en fonction de n.

(2) (*) Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

(3) (*) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(4) (*) Donner les valeurs propres des matrices ci-dessous. Sont-elles inversibles?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(5) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que 3 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_3.
(b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.