ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Quinzaine de colle n°8

Période du 18/01 au 29/01

Semaine du 18/01 au 22/01

Programme

- **Chapitre 9.** Intégralité

Selection d'exercices

(1) (*) Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées. En déduire que A est diagonalisable et exprimer une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(2) (*) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés. Les matrices sont-elles diagonalisables? Sont-elles inversibles?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(3) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que 4 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_4.
(b) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(4) (*) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer $M^2 - 2M - 3I$. En déduire les valeurs propres de M.
(b) M est-elle diagonalisable? Si oui, expliciter une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $M = PDP^{-1}$.

(5) (***) Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} V(X) & \mathrm{cov}(X,Y) \\ \mathrm{cov}(Y,X) & V(Y) \end{pmatrix}.$$

(a) Justifier que A est diagonalisable.
(b) Montrer que les valeurs propres de A sont positives ou nulles.

(6) (**/***) Soient $m > 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Exprimer M^2 en fonction de M et I_3.
(b) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

(7) (**/***) Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit v un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $v_1, v_2, ..., v_n$ dans la base $\mathcal{B}$ et qui vérifie

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 1.$$

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^n$ qui à tout vecteur $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ associe le vecteur $f(x)$ défini par :

$$f(x) = x - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) v.$$

(a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
(b) Montrer que $f \circ f = f$. En déduire un polynôme annulateur P de degré 2 de f.
(c) Déterminer les racines de P et en déduire des candidates potentielles pour les valeurs propres de f.
(d) Montrer que $f(v) = 0$ et que $f(e_1 - e_2) = e_1 - e_2$. En déduire le spectre de f.

Semaine du 25/01 au 29/01

Programme

- **Chapitre 9**. Intégralité.
- Chaines de Markov

Selection d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle dont les sommets sont numérotés 1, 2 et 3, de la façon suivante: si, à l'instant n, il est sur l'un quelconque des trois sommets, alors à l'instant $(n+1)$,

- soit il y reste, avec une probabilité de $\dfrac{2}{3}$
- soit il se place sur l'un des deux autres sommets, et ceci avec la même probabilité.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le mobile au moment n. On suppose qu'à l'instant $n = 0$, il se trouve au sommet numéro 1 (ou encore $X_0 = 1$).

(a) Représenter le diagramme de transition de la chaîne de Markov (X_n).
(b) En déduire la matrice de transition A.
(c) Quelles instructions permettent de simuler et d'afficher la *trajectoire* des n premiers termes de la chaîne, où n est rentré par l'utilisateur?
(d) On pose $B = 6A$. Diagonaliser B. En déduire l'expression de B^n puis de A^n.
(e) Quel est l'état stable de la chaîne?
(f) Déterminer la loi de X_n. La chaîne est-elle convergente?