QUIZ

Le quiz de fin de chapitre

Applications linéaires

Vrai ou Faux ?

(1)	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ alors f est injective.	
(2)	La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible.	
(3)	La matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P + 2P'$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
(4)	L'endomorphisme de la question précédente est un automorphisme.	
(5)	Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ alors f injective.	
(6)	Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ alors f surjective .	
(7)	Une matrice de passage est toujours inversible.	
(8)	Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.	
(9)	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$. Alors, pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est liée.	
(10)	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$. Alors $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.	
(11)	Michel Sardou, c'est super.	

Un petit exercice de synthèse

Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

et les deux vecteurs u et v définis par

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(1) L'endomorphisme f est-il bijectif?

(2) (a) Montrer que (u) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
(b) Calculer $f(v)$ puis en déduire que $v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
(c) Déterminer $\mathrm{rg}(f - \mathrm{id})$ puis en déduire que (v) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.

(3) Rechercher tous les vecteurs $t \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que $f(t) = t + v$.

(4) Déterminer un vecteur w tel que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et tel que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ soit donnée par

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Dans cette question, on suppose qu'il existe un endomorphisme g de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $g \circ g = f$.
(a) Montrer que $g \circ f = f \circ g$.
(b) En déduire que $f(g(u)) = 0$ et que $f(g(v)) = g(v))$.
(c) En déduire l'existence de réels a et b tels que $g(u) = au$ et $g(v) = bv$.
(d) En déduire alors que la matrice de g dans la base $\mathcal{C}$ est donnée par

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$$

où a, b sont les réels de la question précédente et c, d, e sont des réels que l'on ne cherchera pas à préciser.

(6) Existe-t-il une matrice B telle que $B^2 = A$?