ECE 2 - Année 2020-2021
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

QUIZ

Le quiz de fin de chapitre

Intégration

Vrai ou Faux ?

(1)	Si $f(t) \longrightarrow 0$, $t \to +\infty$, alors $\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.	
(2)	Si $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge absolument alors $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$ converge.	
(3)	$\int_0^1 \frac{e^{t^2}-1}{t}\mathrm{d}t$ converge.	
(4)	$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^4+t}$ converge.	
(5)	Si f est impaire alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.	
(6)	Si f est positive et paire et que $t^3 f(t) \to 0, t \to +\infty$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t = 0$.	
(7)	$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^2}{(1+t)^2}\mathrm{d}t$ converge.	
(8)	$\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$	
(9)	Si f est $\mathcal{C}^2$ sur $[0;1]$ et que $f(0) = f'(0)$ alors $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ diverge.	
(10)	Si $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \geq 0$, alors $f(t) \geq 0$ sur $[0;1]$.	
(11)	Si f est continue sur $[a;b]$ alors il existe une constante $A \geq 0$ telle que $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq M(b-a)$.	
(12)	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x^2} = 1$.	
(13)	Oh quand même! *Les lacs du Connemara* ça passe.	

Un exercice pour s'entraîner encore et encore

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite d'intégrales

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, I_n est une intégrale convergente.

(2) (a) Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$,

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

(b) En déduire la valeur de I_1.

(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$

(b) En déduire la limite de la suite (I_n).

(4) (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+1}$.

(b) Montrer que (I_n) est décroissante.

(c) À l'aide des deux questions précédentes, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$2I_n \geq \frac{1}{n}.$$

(d) Donner alors un encadrement de I_n puis un équivalent, en $+\infty$.

(e) Enfin, déterminer la nature de la série $\sum I_n$.