ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc - Math 1 sujet A

Mardi 9 Novembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées d'un (*) sont réservées aux khûbes

Exercice 1

Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$$

et

$$22\ln(3) - 23 \approx 1,17 \qquad \frac{1}{22\ln(2)-14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3)-23} \approx 0,86.$$

Partie I : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

(1) Vérifier que $P(1) = 0$. En déduire une factorisation de P.
(2) Vérifier que, pour $x \in \mathbb{R}$, $P\left(\mathrm{e}^x\right) = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 11 - 6\mathrm{e}^{-x}\right)$.
(3) En déduire qu'on a l'égalité :

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

(4) Résoudre $\mathrm{e}^x - 3 > 0$ sur $\mathbb{R}$.
(5) Déduire des questions précédentes le signe, pour $x \in \mathbb{R}$ de

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}.$$

Partie II - Étude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

(6) **Étude de v**
  (a) Calculer les valeurs exactes de $v(\ln(2))$ et de $v(\ln(3))$ en détaillant vos calculs.
  (b) A l'aide des résultats préliminaires, dresser le tableau de variation complet de la fonction v.
  (c) En déduire que $v(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

(7) Quel est l'ensemble de définition de h ?
(8) Dresser le tableau de variation complet de h.

Partie III - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

(9) Calculer u_1 et justifier que $u_2 \leq 1$.

(10) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\ln(2); \ln(3)]$.

(11) Sous SciLab, on écrit et exécute le programme suivant qui affiche la Figure 1 ci-après. Que permet-il de conjecturer quant aux valeurs d'une limite éventuelle pour (u_n)? Justifier la réponse.

```
function y=h(x)
    y=1/(exp(2*x)-12*exp(x)+22*x+12*exp(-x))
endfunction

X=log(2):.01:log(3)
plot2d(X,X,style=2)
plot2d(X, feval(X,h), style=5)
```

(12) Démontrer que (u_n) est décroissante pour $n \geq 1$.

(13) Montrer alors que (u_n) converge vers une limite ℓ, avec $\ln(2) \leq \ell \leq \ln(3)$.

(14) Recopier et compléter le programme SciLab pour qu'il représente graphiquement les n premiers termes de la suite (u_n) où n est rentrée par l'utilisateur (on rappelle qu'on dispose déjà d'une fonction h renvoyant la valeur de $h(x)$)

```
function u=suite(n)
    u=...........
    for k=.........
        ..............
    end
endfunction

n=input('n=?')
N=0 : .......
U=................
disp(....., U, style=-1, rect=[0, 0.7, 25, 1])
```

(15) À l'exécution du programme précédent avec n=25, SciLab affiche la Figure 2 ci-dessous. Que peut-on déduire ? Est-ce cohérent avec ce qui précède ?

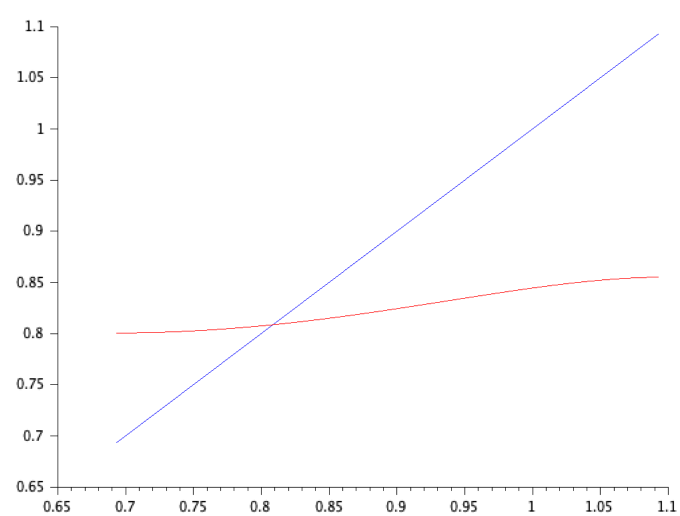

Figure 1

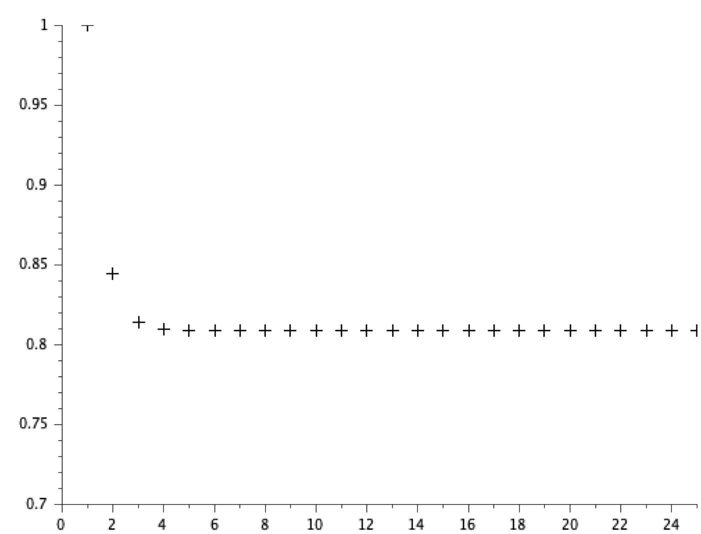

Figure 2

Exercice 2

Partie I : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = e_1 - e_2 + e_3$ et $v = e_1 - e_2$.

(1) (a) Montrer que $u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$.

(b) Vérifier que $(f - \mathrm{id})v = u$.

(c) En déduire que $v \in \operatorname{Ker}\left((f - \mathrm{id})^2\right)$.

(2) (a) Déterminer un vecteur w de $\mathbb{R}^3$, dont la troisième coordonnée (dans la base $\mathcal{B}$) est nulle, telle que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ soit une base de $\mathbb{R}^3$ et que la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ soit la matrice :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On pensera à vérifier que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ une fois le vecteur w déterminé.

(b) Déduire de la question précédente que la matrice A est inversible.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relation est-elle vraie pour $n = 0$?

(d) On exécute le programme `SciLab` ci contre dont le résultat est joint ci-contre.

```
function M=T(n)
   M=[1,n, n*(n-1); 0, 1, 2*n; 0,0,1]
endfunction

for k=1:10
    if T(-k)*T(k)==eye(3,3) then
        disp('true')
    else
        disp('false')
    end
end
```

```
-->
"true"
"true"
"true"
"true"
"true"
"true"
"true"
"true"
"true"
"true"
```

Que peut-on conjecturer? Le démontrer.

Partie II : Étude d'un autre endomorphisme

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.
On note $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{E}$.
On considère alors l'ensemble $\mathcal{F}$ suivant :

$$\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E} \;:\; P(0) = 0\}.$$

(3) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel et que la famille $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$ est une base de $\mathcal{F}$.

(4) On considère l'application g qui à tout élément P de $\mathcal{F}$ associe la fonction polynomiale Q définie par

$$Q(X) = (3X + 1)P(X) - X^2P'(X).$$

(a) Montrer que g est une application linéaire.

(b) Soit $P \in \mathcal{F}$. Calculer $g(P)(0)$ et justifier brièvement pourquoi $g(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3.
(c) En déduire que g est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.
(d) Déterminer la matrice de g dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$.
(e) (*) En déduire que $\mathrm{Sp}(g) = \{1\}$ puis déterminer le sous espace propre de g associé à la valeur propre 1.
(f) À l'aide la Question (2c), exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g^n(f_1)$ en fonction de f_1, f_2 et f_3.

Partie III : Étude de sous-espaces

On introduit les deux sous-ensembles

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ AM = MA\}, \qquad C(T) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ TM = MT\}.$$

(5) Montrer que $C(A)$ et $C(T)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
(6) Déterminer une famille génératrice puis une base de $C(T)$.
(7) En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) de la Partie I, montrer que

$$M \in C(A) \iff P^{-1}MP \in C(T).$$

(8) En déduire la dimension de $C(A)$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Dans une fête foraine, un stand propose le jeu suivant : le joueur lance n fois une pièce et compte le nombre de *Pile* obtenus. Si ce nombre est pair, le joueur est déclaré vainqueur, et s'il est impair, il est déclaré perdant. Si le joueur est déclaré vainqueur, il gagne 10 euros pour chaque *Pile* obtenu, mais s'il a perdu, il doit payer 10 euros pour chaque *Pile* obtenu.
En particulier, s'il n'obtient aucun *Pile*, il est déclaré vainqueur, mais ne remporte rien. La pièce est truquée, et à chaque lancer, la probabilité d'obtenir *Pile* est égale à p ($p \in]0, 1[$), et celle d'obtenir *Face* est de $1 - p$.
On notera X la variable aléatoire égale au nombre de *Pile* obtenus, et G la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
Enfin, on notera A l'événement : "le joueur est déclaré vainqueur" et on dira que le jeu est favorable au joueur si l'espérance mathématique de la variable aléatoire G est positive.

Partie I

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 3$ et $p = \dfrac{2}{3}$.

(1) Reconnaître la loi de X et vérifier que $P(A) = 13/27$.
(2) Montrer que $G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}$, puis expliciter la loi de G.
(3) Calculer l'espérance de G. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Partie II

Dans cette partie, on revient au cas général, où n est entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$.

Celui qui tient le stand souhaite rendre le jeu plus attractif en affichant "À ce jeu, il y a plus de gagnants que de perdants !", et cherche donc les conditions nécessaires sur p et n pour que son affichage ne soit pas mensonger.

Soit Y la variable aléatoire définie par $Y = (-1)^X$.
Autrement dit, Y prend la valeur 1 lorsque X prend une valeur paire, et Y prend la valeur -1 lorsque X prend une valeur impaire.

(4) (a) On note $Z = (Y+1)/2$. Déterminer $Y(\Omega)$, puis montrer que Z suit une loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.
(b) Démontrer que $E(Y) = 2P(A) - 1$.

(5) (a) Donner la loi de X.
(b) En déduire que l'on a également

$$E(Y) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

puis que $E(Y) = (1-2p)^n$.

(6) Exprimer alors la valeur de $P(A)$ en fonction de n et p.
(7) Démontrer que

$$P(A) \geq \frac{1}{2} \iff \left[p \leq \frac{1}{2} \text{ OU "} n \text{ est pair"} \right]$$

Partie III

Le concepteur du jeu souhaite cependant vérifier que, tout en laissant son jeu attractif (c'est à dire en faisant en sorte que $P(A) \geq 1/2$), son activité soit rentable pour lui, autrement dit que le jeu soit défavorable au joueur (c'est à dire que $E(G) \leq 0$).

(8) Exprimer G en fonction de X et Y. En déduire que

$$E(G) = 10 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k P(X = k).$$

(9) Démontrer que :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(10) Montrer que $E(G) = -10np(1-2p)^{n-1}$
(11) Démontrer alors que :

$$\begin{cases} P(A) \geq \dfrac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}$$

(12) (a) Étudier la fonction f définie sur $[0; 1/2]$ par $f(x) = x(1-2x)^{n-1}$.
(b) Pour une valeur de n fixée, comment le concepteur du jeu doit-il truquer sa pièce (c'est à dire quelle valeur doit-il donner à $p \in [0; 1/2]$) pour optimiser la rentabilité de son activité?

Partie IV

Le forain décide de fixer $n = 2$ et $p = \dfrac{1}{4}$.

En période estivale, il pense pouvoir compter sur la participation de 200 clients dans le journée. Avant de se décider à installer son stand, il voudrait être certain, avec un risque d'erreur inférieur à 10%, qu'il gagnera plus de 100 euros dans la journée.
Pour tout entier i compris ente 1 et 200, on note alors G_i le gain algébrique du i-ième joueur.
On note aussi J la variable aléatoire égale au gain du forain sur toute la journée.

(13) Pour tout entier $i \in [\![1; 200]\!]$, donner la loi de G_i et calculer son espérance et sa variance.

(14) Exprimer la variable aléatoire J en fonction des variables aléatoires G_i.
Démontrer alors que $E(J) = 500$ et $V(J) = 11250$.

(15) Justifier que

$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400).$$

(16) (*) Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev, puis montrer que : $P(J \leq 100) \leq \dfrac{9}{128}$.

(17) Compte tenu de ses exigences de rentabilité, le forain peut-il installer son stand ?