ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc - Math 1 sujet A

Solution

Exercice 1

Pour cet exercice, on donne les approximations suivantes

$$\ln(2) \approx 0,69 \qquad \ln(3) \approx 1,10 \qquad 22\ln(2) - 14 \approx 1,25$$

et

$$22\ln(3) - 23 \approx 1,17 \qquad \frac{1}{22\ln(2)-14} \approx 0,80 \qquad \frac{1}{22\ln(3)-23} \approx 0,86.$$

Partie I : un polynôme et une étude de signe

Soit $P(X) = X^3 - 6X^2 + 11X - 6$.

(1) On voit qu'en effet $P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Ainsi 1 est racine de $P(X)$ et $X - 1$ divise donc $P(X)$. En posant la division euclidienne, on trouve

$$P(X) = (X-1)(X^2 - 5X + 6) = (X-1)(X-2)(X-3)$$

où on a factorisé le polynôme de degré 2 *via* calcul implicite de son discriminant.

(2) On évalue le polynôme $P(X)$ en e^x. On trouve bien

$$P(e^x) = (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6.$$

(3) D'après la factorisation précédente, on a

$$P(e^x) = (e^x)^3 - 6(e^x)^2 + 11e^x - 6 = e^{3x} - 6e^{2x} + 11e^x - 6 = (e^x - 1)(e^x - 2)(e^x - 3).$$

En multipliant tout par 2 et en divisant par e^x, on obtient

$$2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x} = \frac{2\left(\mathrm{e}^x - 1\right)\left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x - 3\right)}{\mathrm{e}^x}.$$

(4) Il est clair que $e^x - 3 > 0 \iff e^x > 3 \iff x > \ln(3)$.

(5) La factorisation ci-dessus permet de dresser le tableau de signe de l'expression

$$A(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22 - 12\mathrm{e}^{-x}.$$

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$A(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie II - Étude d'une fonction

On pose $v : x \mapsto \mathrm{e}^{2x} - 12\mathrm{e}^x + 22x + 12\mathrm{e}^{-x}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{v(x)}$.

(6) **Étude de** v

(a) On calcule, avec le plus grand des plaisirs

$$\begin{aligned} v(\ln(2)) &= e^{2\ln(2)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{-\ln(2)} \\ &= e^{\ln(4)} - 12e^{\ln(2)} + 22\ln(2) + 12e^{\ln(1/2)} \\ &= 4 - 24 + 22\ln(2) + 6 \\ &= 22\ln(2) - 14 \simeq 1,25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(\ln(3)) &= e^{2\ln(3)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{-\ln(3)} \\ &= e^{\ln(9)} - 12e^{\ln(3)} + 22\ln(3) + 12e^{\ln(1/3)} \\ &= 9 - 36 + 22\ln(3) + 4 \\ &= 22\ln(3) - 23 \simeq 1,17 \end{aligned}$$

(b) La fonction v est une combinaison d'exponentielles définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, on voit que

$$v'(x) = 2e^{2x} - 12e^x + 22 - 12e^{-x} = A(x)$$

et on connait le signe de la quantité $A(x)$ d'après la partie précédente. On en déduit le tableau de variations suivant (remarquant que $v(0) = 1$)

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$v'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
v	$+\infty$	↘	1	↗	$v(\ln(2))$	↘	$v(\ln(3))$	↗	$+\infty$

Les limites en $\pm\infty$ ont été naturellement obtenues par factorisation du terme prépondérant et croissance comparée.

(c) Les approximations données dans le texte permettent de voir que le minimum de v, atteint en 0, vaut 1 et est strictement positif. Par conséquent, $v(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(7) D'après la question précédente, le dénominateur intervenant dans la définition de h ne s'annule jamais et h est donc définie sur $\mathbb{R}$.

(8) La fonction h étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule jamais; elle est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$h'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

Le signe de la dérivée de h est donc l'opposé de celui de $v'(x)$. On en déduit sans mal les variations de h:

x	$-\infty$		0		$\ln(2)$		$\ln(3)$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
h	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$h(\ln(2))$	$\nearrow$	$h(\ln(3))$	$\searrow$	0

Partie III - Étude d'une suite

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = h(u_n)$.

(9) Par définition, $u_1 = h(u_0) = h(0) = 1/v(0) = 1$. On a également $u_2 = h(u_1) = h(1)$. Or, le tableau de variations de h nous permet d'affirmer que $h(1) \leq h(\ln(3)) = 1/v(\ln(3)) \approx 0,86$ et on a bien $u_2 \leq 1$.

(10) On procède par récurrence comme demandé dans l'énoncé:

- <u>intialisation:</u> $u_1 = 1 \in [\ln(2); \ln(3)]$.
- <u>hérédité:</u> supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [\ln(2); \ln(3)]$. Le tableau de variations de h permet de voir que h est croissante sur cet intervalle. Il suit que

$$\ln(2) \leq 0,8 \approx h(\ln(2)) \leq u_{n+1} = h(u_n) \leq h(\ln(3)) \approx 0,86 \leq \ln(3)$$

et la récurrence est bien terminée.

(11) Le programme `SciLab` proposé permet de représenter graphiquement h (en rouge) ainsi que la droite d'équation $y = x$ (en bleu) sur l'intervalle $[\ln(2); \ln(3)]$. Le point d'intersection de ces deux courbes a pour abscisse la valeur de l'unique point fixe de h, candidat limite en cas de convergence de la suite (u_n). On lit graphiquement $\ell \simeq 0.81$.

(12) On procède encore par récurrence.

- <u>initialisation:</u> pour $n = 1$, on a bien montré ci-avant que $u_2 \leq 1 = u_1$.
- <u>hérédité:</u> supposons que, pour un certain $n \geq 1$, on ait $u_{n+1} \leq u_n$. Par la question précédente, tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[\ln(2); \ln(3)]$ sur lequel la fonction h est croissante. Il suit que

$$u_{n+2} = h(u_{n+1}) \leq h(u_n) = u_{n+1}$$

et la récurrence est bien terminée.

(13) La suite (u_n) étant décroissante (à partir de $n \geq 1$) et minorée (par $\ln(2)$), le théorème de convergence monotone affirme qu'elle converge vers une limite ℓ qui sera également comprise entre $\ln(2)$ et $\ln(3)$. Par continuité de la fonction h sur $\mathbb{R}$, le passage à la limite dans la relation $u_{n+1} = h(u_n)$ impose que ℓ vérifie $\ell = h(\ell)$, équation équivalente à $1/v(\ell) = \ell$ ou encore $\ell \times v(\ell) = 1$.

(14) On recopie et complète sans difficulté le programme. À noter que les n premiers termes de la suite sont les termes dont les rangs sont compris entre 0 et $n - 1$.

```
function u=suite(n)
    u=0 //u_0=0
    for k=1:n
        u=h(u)
    end
endfunction

n=input('n=?')
N=0 : n-1
U=feval(N, suite)
disp(N, U, style=-1, rect=[0, 0.7, 25, 1])
```

(15) On observe que la suite semble décroître et converger vers une valeur $\ell \simeq 0.81$, ce qui est tout à fait cohérent avec tout ce qui précède.

Exercice 2

Partie I : Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $u = e_1 - e_2 + e_3$ et $v = e_1 - e_2$.

(1) (a) On a : $u = e_1 - e_2 + e_3 = (1, -1, 1)$ et $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son vecteur coordonnées.

Utilisons la matrice A de f dans la base canonique. On a

$$AU = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

donc $f(u) = u$, ou encore $u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id})$.

(b) On a : $v = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$. Raisonnons encore *matriciellement*.

$$\operatorname{Mat}(f - \mathrm{id}), \mathcal{B}) = A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$(A - I)V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = U$$

donc $(f - \mathrm{id})v = u$.

(c) On a, d'après les questions précédentes

$$\begin{aligned} (f - \mathrm{id})^2 v &= (f - \mathrm{id})\left((f - \mathrm{id})v\right) \\ &= (f - \mathrm{id})(u) \qquad \text{car } (f - \mathrm{id})v = u \\ &= 0 \qquad \text{car } u \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \end{aligned}$$

Ainsi, $(f - \mathrm{id})^2 v = 0$ donc $v \in \operatorname{Ker}\left((f - \mathrm{id})^2\right)$.

(2) (a) Par définition de la matrice f dans la base $\mathcal{C}$, on doit avoir les relations suivantes:

- $f(u) = u$, ce qui est vérifié d'après 1a.
- $f(v) = u + v$, ce qui est vérifié car $f(v) - v = u$ d'après 1b.
- $f(w) = 2v + w$.

On recherche donc un vecteur de coordonnées $w = (a, b, 0)$ dans la base canonique tel que : $f(w) = 2v + w$.

Matriciellement, cela donne :

$$f(w) = 2v + w \iff AW = 2V + W \iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} 3a + b &= 2 + a \\ -2a &= -2 + b \\ a &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} b &= 2 \\ a &= 0 \end{cases}$$

Ainsi, $w = (0, 2, 0)$.
Vérifions à présent que la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Montrons qu'elle est libre. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$xu + yv + zw = 0 \iff \begin{cases} x + y &= 0 \\ -x - y + 2z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 0 \\ 2z &= 0 \\ x &= 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Ainsi, la famille $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est une famille libre composée de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 donc $\mathcal{C}$ une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) La matrice T de f dans la base $\mathcal{C}$ est triangulaire sans 0 sur sa diagonale donc elle est inversible. On en déduit que l'endomorphisme f est bijectif. La matrice A de f dans la base canonique est donc également inversible.

(c) On montre ce résultat par récurrence.

- <u>initialisaton</u>. Pour $n = 1$

$$T^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \times 0 \\ 0 & 1 & 2 \times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc la propriété est vraie pour $n = 1$.

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$,

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} T^{n+1} &= T^nT = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 2n+n(n-1) \\ 0 & 1 & 2+2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & n(n+1) \\ 0 & 1 & 2(n+1) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc la propriété est vraie au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence.

Pour $n = 0$, on a

$$T^0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \times (0+1) \\ 0 & 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc la propriété est encore vraie pour $n = 0$.

(d) La fonction `T` renvoie, à partir d'un un entier n en argument, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matrice qu'on sait être égale à T^n si $n \in \mathbb{N}$.
La commande de test `if T(-k)*T(k)==eye(3,3)` permet de vérifier si le produit de T^n avec une matrice de la même forme mais avec l'entier opposé est bien égal à la matrice identité. Ce qui semble être le cas pour les 10 premiers entiers. Cela s'interprète comme le fait que l'inverse de T^n est la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ou encore, sachant que T est inversible et que $\left(T^{-1}\right)^n = T^{-n} = \left(T^n\right)^{-1}$, la formule précédente est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$. Ce qu'on doit naturellement montrer.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On vérifie bien que

$$\begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} 1 & -n & n(n+1) \\ 0 & 1 & -2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(T^n\right)^{-1} = T^{-n}$$

et la formule s'étend bien à $n \in \mathbb{Z}$.

Partie II : Étude d'un autre endomorphisme

On note $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3.
On note $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3$ les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{E}$.
On considère alors l'ensemble $\mathcal{F}$ suivant :

$$\mathcal{F} = \{P \in \mathcal{E} \ :\ P(0) = 0\}.$$

(3) Soit $P \in \mathcal{E}$. Notons $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$. Alors

$$\begin{aligned} p \in \mathcal{F} &\iff P(0) = 0 \\ &\iff a \times 0^3 + b \times 0^2 + c \times 0 + d = 0 \\ &\iff d = 0 \\ &\iff P(X) = aX^3 + bX^2 + cX = af_3(X) + bf_2(X) + cf_1(X) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(f_3, f_2, f_1)$$

donc $\mathcal{F}$ et le sous-espace vectoriel engendré par la famille (f_3, f_2, f_1) donc $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel. De plus, la famille (f_3, f_2, f_1) est libre ((f_3, f_2, f_1) sont des vecteurs de la base canonique). Donc la famille (f_3, f_2, f_1) est une base de $\mathcal{F}$.

(4) (a) Soient $(P, Q) \in \mathcal{E}^2$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} g(\lambda P + \mu Q)(X) &= (3X+1)(\lambda P + \mu Q)(X) - X^2(\lambda P + \mu Q)'(X) \\ &= \lambda(3X+1)P(X) + \mu(3x+1)Q(x) - \lambda X^2 P'(X) - \mu X^2 Q'(X) \\ &= \lambda\big((X+1)P(X) - X^2P'(X)\big) + \mu\big((3X+1)Q(X) - X^2Q'(X)\big) \\ &= \lambda g(P)(X) + \mu g(Q)(X) \end{aligned}$$

donc g est une application linéaire.

(b)

- Soit $P \in \mathcal{F}$. Ainsi, $P(0) = 0$. On a donc :

$$g(P)(0) = (0+1)P(0) - 0^2P'(0) = P(0) = 0$$

  donc $g(P)(0) = 0$.

- La fonction $g(P)$ est *a priori* de degré inférieur à 4 mais le terme en x^4 est nul. En effet, si $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ alors

$$g(P)(X) = (3X+1)(aX^3 + bX^2 + cX + d) - X^2(3aX^2 + 2bX + c) = X^4(3a - 3a) + \dots.$$

  Ainsi, $g(P)$ est de degré inférieur ou égal à 3.

(c) D'après la question précédente, si $P \in \mathcal{F}$, alors $g(P) \in \mathcal{F}$ car $g(P) \in \mathcal{E}$ et $g(P)(0) = 0$ donc g est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{F}$ donc g est un endomorphisme de $\mathcal{F}$.

(d) On a

$$\begin{aligned} g(f_3)(x) &= (3x+1)x^3 - x^2 3x^2 = 3x^4 + x^3 - 3x^4 \\ &= x^3 \\ &= f_3(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f_2)(x) &= (3x+1)x^2 - x^2 2x = 3x^3 + x^2 - 2x^3 \\ &= f_3(x) + f_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(f_1)(x) &= (3x+1)x - x^2 = 3x^2 - x^2 + x = 2x^2 + x \\ &= 2f_2(x) + f_1(x) \end{aligned}$$

Ainsi, on a (attention à l'ordre des vecteurs) :

$$\mathrm{Mat}\,(g,(f_3,f_2,f_1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(e) Comme T est la matrice de g dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$, T^n est la matrice de g^n dans la base $\mathcal{H}$.

D'autre part, les coordonnées de f_1 dans la base $\mathcal{H} = (f_3, f_2, f_1)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a alors, d'après la question 2c :

$$T^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n(n-1) \\ 2n \\ 1 \end{pmatrix}$$

ce qui donne

$$g^n(f_1) = n(n-1)f_3 + 2nf_2 + f_1$$

soit

$$g^n(f_1)(x) = n(n-1)x^3 + 2nx^2 + x.$$

Partie III : Étude de sous-espaces

On introduit les deux sous-ensembles

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ AM = MA\}, \qquad C(T) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ TM = MT\}.$$

(5) On montre que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, c'est à dire en montrant que c'est non vide et que c'est stable par combinaison linéaire. La preuve est exactement la même pour $C(T)$ et on l'omet ici.

- La matrice nulle commute avec A et est donc clairement un élément de $C(A)$ qui est bien non vide;
- Si M et N sont deux matrices de $C(A)$ (qui commutent avec A donc) et λ, μ deux réels, on a

$$(\lambda M + \mu N)A = \lambda MA + \mu NA = \lambda AM + \mu AN = A(\lambda M + \mu N),$$

et donc $\lambda M + \mu N$ commute encore avec A et est bien un élément de $C(A)$ qui est stable par combinaison linéaire.

On a bien montré que $C(A)$ était un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(6) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned}
M \in C(T) &\iff MT = TM \\
&\iff \begin{pmatrix} a & a+b & 2b+c \\ d & d+e & 2e+f \\ g & g+h & 2h+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d+2g & e+2h & f+2i \\ g & h & i \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& a+d \\ a+b &=& b+e \\ 2b+c &=& c+f \\ d &=& d+2g \\ d+e &=& e+2h \\ 2e+f &=& f+2i \\ g+h &=& h \\ 2h+i &=& i \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& e = i \\ d &=& g = h = 0 \\ f &=& 2b \end{array} \right. \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 2b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$C(T) = \mathrm{Vect}\left(I;\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

De plus, la famille formée par les 3 matrices précédentes est clairement libre et forme donc une base de $C(T)$ qui est alors de dimension 3.

(7) En notant P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v, w) de la Partie I, la formule de changement de base donne

$$A = PTP^{-1}.$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
M \in C(A) &\iff MA = AM \\
&\iff MPTP^{-1} = PTP^{-1}M \\
&\iff P^{-1}MPT = TP^{-1}MP \qquad \text{(on a multiplié par } P^{-1} \text{ à gauche et par } P \text{ à droite)} \\
&\iff P^{-1}MP \in C(T).
\end{aligned}$$

(8) On part de la base de $C(T)$ pour construire une base de $C(A)$. Notons (I, J, K) la base de $C(T)$ exhibée ci-avant.

$$\begin{aligned}
M \in C(A) &\iff P^{-1}MP \in C(T) \\
&\iff P^{-1}MP = aI + bJ + cK \\
&\iff M = P\,(aI + bJ + cK)\,P^{-1} = aI + bPJP^{-1} + cPKP^{-1}
\end{aligned}$$

Et donc

$$C(A) = \mathrm{Vect}\left(I;\ PJP^{-1};\ PKP^{-1}\right).$$

Ces trois matrices formant une famille libre (on factorise par P et P^{-1} dans l'équation de liaison et on utilise que (I, J, K) est libre), elles forment une base de $C(A)$ qui est également de dimension 3.

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **ECRICOME 2018**.

Partie I

(1) Á chacun des trois lancers, on a une probabilité $p = 2/3$ d'obtenir *Pile* (et 1/3 pour l'alternative contraire), on reconnait en X une loi binomiale

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, 2/3).$$

(2) On voit que

$$P(A) = P([X=0] \cup [X=2]) = P([X=0]) + P([X=2]) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1+3\times 4}{3^3} = \frac{13}{27}.$$

(3) Pour chaque valeur de X, on a une valeur différente de G. Si $X = 0$, alors $G = 0$, si $X = 1$, alors on perd 10 euros et $G = -10$, si $X = 2$, alors on gagne 20 euros et $G = 20$. Enfin, si $X = 3$, on perd 30 euros et $G = -30$. Au final,

$$G(\Omega) = \{-30, -10, 0, 20\}.$$

(4) On calcule l'espérance

$$\begin{aligned} E(G) &= -30P(G=-30) - 10P(G=-10) + 20P(G=20) \\ &= -30P(X=3) - 10P(X=1) + 20P(X=2) \\ &= -30\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 10 \times 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 20 \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{-60}{27} = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

On trouve donc que $E(G) < 0$ et le jeu est défavorable au joueur.

Partie II

(4) (a) Si $Y = 1$, alors $Z = 1$. Si $Y = -1$, alors $Z = 0$. On a bien $Z(\Omega) = \{0; 1\}$. De plus,

$$P(Z=1) = P(Y=1) = P(X \in 2\mathbb{N}) = P(A),$$

et on a bien $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(P(A))$.

(b) D'après la question précédente, $E(Z) = P(A)$ et $Y = 2Z - 1$. Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(Y) = E(2Z-1) = 2E(Z) - 1 = 2P(A) - 1.$$

(5) (a) Comme précédemment, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

(b) D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E(Y) &= E((-1)^X) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

On utilise alors la formule du binôme

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (-p+1-p)^n = (1-2p)^n.$$

(6) D'après les questions 1b. et 2b., on a

$$(1-2p)^n = E(Y) = 2P(A) - 1 \iff P(A) = \frac{(1-2p)^n + 1}{2}.$$

(7) On résout

$$\begin{aligned} P(A) \geq \frac{1}{2} &\iff \frac{(1-2p)^n + 1}{2} \geq \frac{1}{2} \\ &\iff (1-2p)^n \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } 1 - 2p \geq 0 \\ &\iff n \text{ pair ou } p \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie III

(8) On "gagne" 10 euros pour chaque *Pile* (compté avec X) affecté du signe donné par Y selon la parité de X, ou encore

$$G = 10XY = 10X(-1)^X.$$

Toujours avec le théorème de transfert, on obtient

$$\begin{aligned} E(G) &= \sum_{k=0}^{n} 10k(-1)^k P(X = k) \\ &= 10\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \end{aligned}$$

(9) Soit $k \in [\![1; n]\!]$.

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

(10) C'est un peu le même calcul que celui justifiant la formule de l'espérance de la binomiale.

$$\begin{aligned} E(G) &= 10\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}(-p)^k(1-p)^{n-k} \\ &= 10n\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}(-p)^k(1-p)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= 10n(-p)\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}(-p)^j(1-p)^{n-1-j} \\ &= -10np(1-2p)^{n-1} \end{aligned}$$

(11) On connait déjà les conditions pour que $P(A) \geq 1/2$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} E(G) \leq 0 &\iff -10np(1-2p)^{n-1} \leq 0 \\ &\iff (1-2p)^{n-1} \geq 0 \\ &\iff 1 - 2p \geq 0 \text{ ou } n\text{impair} \end{aligned}$$

Comme n ne peut pas être pair et impair à la fois, l'intersection des conditions précédentes donne bien

$$\begin{cases} P(A) \geq \frac{1}{2} \\ E(G) \leq 0 \end{cases} \iff p \leq \frac{1}{2}.$$

(12) (a) La fonction f est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a foriori* sur $[0; 1/2]$. Le calcul donne
$$f'(x) = (1-2x)^{n-2}(1-2nx).$$
On obtient le tableau de variations suivant

x	0		$1/2n$		$1/2$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$f(1/2n)$	↘	0

avec
$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}.$$

(b) La rentabilité est optimale pour le concepteur lorsque l'espérance du gain est minimale, ou, de manière équivalente, lorsque $f(p)$ est maximal sur $[0; 1/2]$. Il faut donc choisir
$$p = \frac{1}{2n}.$$

Partie IV

(13) Ici, on explicite facilement la loi de G_i en revenant à la définition du jeu. $G_i(\Omega) = \{0, -10, 20\}$. et

a	0	-10	20
$P(G_i = a)$	$9/16$	$6/16$	$1/16$

Ceci permet de calculer facilement l'espérance et la variance
$$E(G_i) = -10 \times \frac{9}{16} + 20 \times \frac{1}{16} = -\frac{5}{2}$$
et
$$V(G_i) = E(G_i^2) = E(G_i)^2 = 100 \times \frac{9}{16} + 400 \times \frac{1}{16} - \left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{225}{4} = \left(\frac{15}{2}\right)^2.$$

(14) Il est clair que le gain du forain est égal à l'opposé du total des gains de tous les joueurs, ou encore
$$J = -\sum_{i=1}^{200} G_i.$$
Par linéarité de l'espérance
$$E(J) = -\sum_{i=1}^{200} E(G_i) = -200 \times \left(-\frac{5}{2}\right) = 500$$
et, par indépendance (que l'on peut supposer) des G_i,
$$V(J) = (-1)^2 \sum_{i=1}^{200} V(G_i) = 200 \times \frac{225}{4} = 11250.$$

(15)
$$\begin{aligned} |J-500| \geq 400 &\iff J - 500 \geq 400 \text{ ou } J - 500 \leq -400 \\ &\iff J \geq 900 \text{ ou } J \leq 100 \end{aligned}$$

En particulier, l'évènement
$$[J \leq 100] \subset [|J-500| \geq 400]$$

et on a bien la comparaison des probabilités correspondantes voulue.

(16) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que, si Y est une variable aléatoire admettant une variance, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$P(|Y - E(Y)| > \varepsilon) \leq \frac{V(Y)}{\varepsilon^2}.$$

En utilisant la question précédente et l'inégalité de Bienaymé-Tchébychev sur J qui admet bien une variance, on voit que

$$P(J \leq 100) \leq P(|J - 500| \geq 400) \leq \frac{V(J)}{400^2} = \frac{11250}{160000} = \frac{9}{128}.$$

(17) Le forain installera son stand si $P(J \leq 100) \leq 10\%$. Or, cette probabilité est majorée par $9/128$ qui est inférieur à 10% (en effet $9/128 \leq 9/100 < 10\%$). Donc il peut installer son stand.