ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc - Math 1 sujet B

Mardi 9 Novembre
Durée : 4 heures

Les questions précédées d'un (*) sont réservées aux khûbes

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale

$$P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-x)^k}{k}.$$

(1) Justifier que P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que, pour tout x différent de -1, on a

$$P_n'(x) = \frac{x^{2n}-1}{x+1}.$$

(2) En déduire les variations de P_n sur $[0; +\infty[$ et que $P_n(1) < 0$.

(3) Montrer que

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1}\left(\frac{x}{2n+2} - \frac{1}{2n+1}\right).$$

(4) En déduire, par récurrence, que $P_n(2) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(5) Montrer que l'équation $P_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive x_n et qu'on a

$$1 < x_n \leq 2.$$

(6) (a) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante qui renvoie la valeur de $P_n(x)$.

```
function y=P(n,x)
    L=zeros(1, ... )
    for k= ....
        L(k)= ....
    end
    y=sum(L)
endfunction
```

(b) Écrire, sous `SciLab`, une fonction d'en-tête `function c=x(n)` qui renvoie une valeur approchée de x_n à 10^{-4} près obtenue par la méthode de dichotomie.

(7) Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$P_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(8) En déduire que

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(9) Montrer que, pour tout $t \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $t^{2n} - 1 \geq n(t^2-1)$.

(10) Déduire des deux questions précédentes que
$$0 < x_n - 1 \leq \frac{\sqrt{2\ln(2)}}{\sqrt{n}}.$$

(11) Conclure quant à la limite de (x_n).

Exercice 2

On rappelle que si a, b sont deux réels, le *maximum* de a et de b est défini par
$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq b \\ b, & \text{si } b \geq a \end{cases}$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**.
  (a) Montrer que la fonction $t \longmapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  (b) En distinguant les cas $x \leq 0$, $0 < x < 1$ et $x \geq 1$, calculer (en fonction de x)
$$y = \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t.$$

On considère alors une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on définit la variable aléatoire Y comme suit
$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\mathrm{d}t, \qquad \omega \in \Omega.$$

(2) Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ (avec $p \in]0;1[$), alors $Y = X$.

(3) On considère la variable aléatoire X définie par $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ et
$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$
  (a) Déterminer $P(X = 0)$.
  (b) Montrer que $Y(\Omega) = \left\{-\frac{1}{2}; 1\right\}$.
  (c) Déterminer la loi de Y, puis son espérance et sa variance.

(4) On suppose maintenant que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.
  (a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
  (b) Déterminer la loi de Y.
  (c) Montrer que Y admet une espérance et une variance que l'on déterminera.

Exercice 3

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$\mathrm{d} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + d \end{array}.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le *déterminant* de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa *trace*.

(1) **Propriétés de la trace**.

  (a) Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

(b) Déterminer une base du noyau de tr.
(c) En déduire l'image de tr.
(d) Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
(e) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.
(f) En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie?
(g) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A et ${}^tA$ ont la même trace.

(2) **À propos du déterminant**.

(a) Calculer $\text{d}(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
(b) Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Établir la formule: $\text{d}(AB) = \text{d}(A) \times \text{d}(B)$.
(c) On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\text{d}(P)$ est non nul.
(d) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\text{d}(P^{-1}AP) = \text{d}(A)$.
(e) En déduire que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est-elle vraie?
(f) Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, A et ${}^tA$ ont le même déterminant.

(3) Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
Montrer que
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{tr}(A), \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\lambda_2 = \text{d}(A).$$

(4) Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

(a) Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,
$$f^2(u) = \text{tr}(A)f(u) - \text{d}(A)u.$$
(b) En déduire un polynôme annulateur de A.

(c) Prouver la réciproque de la question (2c).

(5) Dans cette question seulement, on suppose que A est **non colinéaire à** I.
On introduit
$$w = e_1 + e_2.$$
(a) (i) Montrer que, s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $f(e_2) = \lambda_2 e_2$, alors nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
(ii) Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $f(w) = \lambda_3 w$, peu importe les réels λ_1, λ_2 et λ_3.

(b) En déduire qu'il existe au moins un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
(c) En déduire, à l'aide de la question (4a) l'expression de la matrice M représentant u dans la base $(x, f(x))$.
(d) En déduire que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

Problème

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

Partie I : Préliminaires

On définit
$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(1) (a) Calculer $S_1,\ S_2,\ S_3$.

(b) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de S_n

```
function y=S(n)
    y=0
    for i=0:n
    y=y+prod(.......)/prod(.......)
    end
endfunction
```

(c) Justifier que
$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}.$$

(d) En déduire que
$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

On commencera par montrer que
$$\sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2S_n.$$

(2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p.$$

(b) En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

(c) En déduire alors la limite de u_p lorsque $p \to +\infty$.

Partie II : Cours en bourse d'une action

On suppose les variations journalières d'une action indépendantes les unes des autres. On convient de noter $X_0 = 0$ le cours correspondant au jour $j = 0$ (début de l'observation), et on suppose que, chaque jour, le cours:

- monte d'une unité $(+1)$ avec une probabilité p $(0 < p < 1)$;
- ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

(3) **Simulation sous `SciLab`**

(a) Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de X_{2n}.

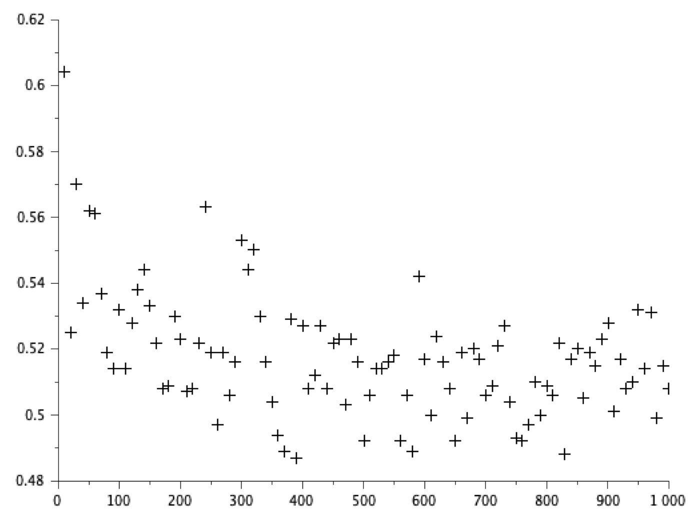
```
function x=X(n, p)
    x=0
    for k=......
       if ...... then
          x=........
       else
          x=.......
       end
    end
endfunction
```

(b) On ajoute les commandes suivantes dont l'exécution permet d'obtenir la figure ci-contre. Expliquer les instructions et émettre une conjecture cohérente avec le résultat affiché.

```
p=1/2

function y=evol_p(n)
    L=zeros(1,1000)
    for k=1:1000
        L(k)=X(n, .5)
    end
    y=length(find(L>=0))/1000
endfunction

N=10:10:1000
Y=feval(N, evol_p)
plot2d(N, Y, style=-1)
```



(4) Déterminer $X_{2n}(\Omega)$.

(5) On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

(a) Quel lien y a-t-il entre Y_{2n} et Z_{2n}?
(b) Expliciter les lois de Y_{2n} et Z_{2n} et préciser leurs espérances et leurs variances.
(c) (*) Que vaut $\text{cov}(Y_{2n}, Z_{2n})$? Commenter.

(6) Quelle autre relation lie X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n}? En déduire l'expression de $E(X_{2n})$.
Interpréter le cas particulier $p = 1/2$.

(7) Montrer que, pour tout $k \in [\![-n;n]\!]$,

$$P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}.$$

(8) On suppose, dans cette question que $p = 1/2$. On note $p_n = P(X_{2n} \geq 0)$.
Montrer que

$$p_n = \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$

Que valent $p_1,\ p_2,\ p_3$?
Que se passe-t-il quand n devient grand ?