ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc - Math 1 sujet B

Solution

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EML 2002**.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction polynomiale

$$P_n(x) = -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + ... + \frac{x^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-x)^k}{k}.$$

(1) Étant polynomiale, P_n est dérivable sur $\mathbb{R}$. La dérivée d'une somme (finie) étant égale à la somme des dérivées, on a

$$\begin{aligned} P_n'(x) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k k x^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k x^{k-1} \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} (-1)^{j+1} x^j = -\sum_{j=0}^{2n-1} (-x)^j \qquad \text{(on a réindexé par } j = k-1) \\ &= -\frac{(-x)^{2n} - 1}{-x - 1} = \frac{x^{2n} - 1}{x+1} \quad (\text{car } -x \neq 1.) \end{aligned}$$

(2) P_n' est du signe de $x^{2n} - 1 = (x^n + 1)(x^n - 1)$ et comme $n > 0$ la fonction $x \to x^n - 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et s'annule en 1, on en déduit son signe et par suite celui de la dérivée. Le tableau de variations est le suivant.

x	0		1		$+\infty$
$P_n'(x)$		$-$	0	$+$	
P_n	0	$\searrow$	$P_n(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

En $+\infty$, c'est le terme de plus haut degré qui fournit un équivalent et la limite

$$P_n(x) \sim x^{2n} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Comme $P_n(0) = 0$ et que P_n est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $P_n(1) < P_n(0) = 0$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{2(n+1)} \frac{(-1)^k x^k}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} + \frac{(-1)^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2} x^{2n+2}}{2n+2} \\ &= P_n(x) + x^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2}\right). \end{aligned}$$

(4) On a donc en particulier pour $x = 2$

$$P_{n+1}(2) = P_n(2) + 2^{2n+1}\left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2}\right).$$

Et comme

$$-\frac{1}{2n+1} + \frac{2}{2n+2} = \frac{n}{(2n+1)(n+1)} \geq 0,$$

la suite $(P_n(2))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est alors croissante. De plus, $P_1(2) = -\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} = 1 \geq 0$ alors, pour tout entier $n \geq 1$, $P_n(2) \geq P_1(2) \geq 0$.

(5) Sur $]0;1[$, P_n est strictement décroissante à valeur dans $]P_n(0);0[$ et ne s'annule pas. Sur $[1;+\infty[$, P_n est strictement croissante (et continue) et réalise une bijection (d'après le théorème du même nom) de $[1;+\infty[$ sur $[P_n(1);+\infty[$. Comme $P_n(0) < 0$, $0 \in [P_n(0);+\infty[$ et admet donc un unique antécédent par P_n, noté x_n.
L'équation $P_n(x) = 0$ admet donc une unique solution strictement positive et celle-ci est bien x_n.
De plus, comme $P_n(1) < 0 = P_n(x_n) \leq P_n(2)$ d'après les questions précédentes et que P_n est bijective et strictement croissante sur $[1;+\infty[$ (sa bijection réciproque aussi et) on a bien

$$1 < x_n \leq 2.$$

(6) (a) La fonction P_n est définie par une somme, on utilise donc une boucle `for` et la commande `sum()` sur les composantes d'un vecteurs L qui contiendront tous les termes $(-x)^k/k$.

```
function y=P(n,x)
    L=zeros(1, 2*n )
    for k= 1:2*n
        L(k)= (-x)^k/k
    end
    y=sum(L)
endfunction
```

(b) On fait donc une recherche de la solution de $P_n(x) = 0$, par dichotomie, en partant de l'intervalle $[1;2]$ qu'on réduit de moitié à chaque étape jusqu'à ce que la taille de l'intervalle de recherche soit plus petite que la précision voulue.

```
function c=x(n)
    a=1
    b=2
    c=(a+b)/2
    while (b-a) > 10^(-4)
         if P(n,c) >0 then
             b=c
         else
             a=c
         end
         c=(a+b)/2
   end
endfunction
```

(7) P_n est une primitive de P_n' mais $P_n(0) = 0$ donc P_n est **la** primitive de P_n' qui s'annule en 0, ou encore, pour tout $x \geq 0$,

$$P_n(x) = \int_0^x P_n'(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(8) Par la relation de Chasles, on a, comme $x_n > 1$,

$$0 = P_n(x_n) = \int_0^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t + \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t,$$

ou encore

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t.$$

(9) Si $t = 1$ les deux quantités sont nulles et donc égales et l'inégalité large est vérifiée. Si $t > 1$, alors $t^2 > 1$ (et $t^2 - 1 > 0$) et on a

$$\frac{t^{2n}-1}{t^2-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(t^2\right)^k \geq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n,$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

(10) L'inégalité précédente, après avoir remarqué que $t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$, se traduit par le fait que, pour $t \geq 1$, on a

$$\frac{t^{2n}-1}{t+1} \geq n(t-1),$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \geq \int_1^{x_n} n(t-1)\mathrm{d}t = n\left[\frac{(t-1)^2}{2}\right]_1^{x_n} = n\frac{(x_n-1)^2}{2}.$$

Avec ce qui précède, on a donc

$$\begin{aligned}
n\frac{(x_n-1)^2}{2} &\leq \int_1^{x_n} \frac{t^{2n}-1}{t+1}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1-t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \\
&\leq \int_0^1 \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t \qquad \left(\text{car } \int_0^1 \frac{t^{2n}}{t+1}\mathrm{d}t \geq 0\right) \\
&= \ln(2),
\end{aligned}$$

ce qui se résumé en

$$n\frac{(x_n-1)^2}{2} \leq \ln(2) \Longleftrightarrow (x_n-1)^2 \leq \frac{2\ln(2)}{n}.$$

Mais, $x_n > 1$ donc ceci est équivalent à

$$0 < x_n - 1 \leq \sqrt{\frac{2\ln(2)}{n}},$$

ce qui était demandé.

(11) On applique le théorème des gendarmes à l'encadrement précédent donc les extrémités tendent toutes deux clairement vers 0. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0.$$

Exercice 2

On rappelle que si a, b sont deux réels, le *maximum* de a et de b est défini par

$$\max(a,b) = \begin{cases} a, & \text{si } a \geq b \\ b, & \text{si } b \geq a \end{cases}$$

(1) Soit $x \in \mathbb{R}$ **fixé**.

(a) Sur $]-\infty; x[$, la fonction est continue comme constante égale à x. Sur $]x; +\infty[$ la fonction est affine (c'est $t \mapsto t$). Il faut vérifier que c'est continu en x. Mais

$$\lim_{t \to x^+} \max(x,t) = \lim_{t \to x^+} t = x = \lim_{t \to x^-} \max(x,t)$$

et $t \longmapsto \max(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Comme indiqué, on distingue les cas:

- Si $x < 0$, alors pour tout $t \in [0;1]$, $\max(x,t) = t$ et

$$y = \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

- Si $0 \leq x < 1$, il faut découper l'intégrale en 2

$$\begin{aligned} y &= \int_0^1 \max(x,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \max(x,t)\mathrm{d}t + \int_x^1 \max(x,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x x\mathrm{d}t + \int_x^1 t\mathrm{d}t \\ &= x^2 + \left[\frac{t^2}{2}\right]_x^1 \\ &= x^2 + \frac{1-x^2}{2} \\ &= \frac{x^2+1}{2}. \end{aligned}$$

- Si $x \geq 1$, alors pour tout $t \in [0;1]$, $\max(x,t) = x$ et

$$y = \int_0^1 x\mathrm{d}t = x.$$

Au final,

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{1+x^2}{2}, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\[2ex] x, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

On considère alors une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on définit la variable aléatoire Y comme suit

$$Y(\omega) = \int_0^1 \max(X(\omega), t)\mathrm{d}t, \qquad \omega \in \Omega.$$

(2) Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et donc pour tout ω, $X(\Omega) \geq 1$ ce qui donne, d'après la Question (1b), que $Y(\omega) = X(\omega)$ et donc $X = Y$.

(3) On considère la variable aléatoire X définie par $X(\Omega) = \{-1; 0; 1\}$ et

$$P(X = -1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

(a) Comme $P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 1) = 1$, on a

$$P(X = 0) = 1 - 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

(b) On utilise la Question (1b). Si $X(\omega) = -1 < 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$. Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$ également. Enfin, si $X(\omega) = 1$, alors $Y(\omega) = X(\omega) = 1$. Les seules possibilités pour Y sont $1/2$ et 1, on a bien

$$Y(\Omega) = \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}.$$

(c) C'est une loi finie sans difficulté d'après ce qui précède.

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P([X = -1] \cup [X = 0]) = P(X = -1) + P(X = 0) = \frac{3}{4}, \qquad P(Y = 1) = P(X = 1) = \frac{1}{4}.$$

Il suit que,

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{2} \times P(Y = 1/2) + 1 \times P(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{5}{8} \\
E(Y^2) &= \frac{1}{4} \times P(Y = 1/2) + 1 \times P(Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{7}{16} \\
V(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \qquad \text{(König-Huyguens)} \\
&= \frac{7}{16} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 \\
&= \frac{3}{64}.
\end{aligned}$$

(4) On suppose maintenant que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, où $\lambda > 0$.

(a) On sait que $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Si $X(\omega) = 0$, alors $Y(\omega) = 1/2$. Si, $X(\omega) \geq 1$, alors $Y(\omega) = X(\omega)$. On a bien

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

(b) Il suit même, sans difficulté que

$$P\left(Y = \frac{1}{2}\right) = P(X = 0) = e^{-\lambda},$$

et, pour tout $k \geq 1$,

$$P(Y = k) = P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

(c) Il est facile de voir que Y admet une espérance.

$$\begin{aligned}
Y \text{ admet une espérance} &\iff \sum_{a\in Y(\Omega)} aP(Y=a) \text{ converge absolument}\\
&\iff \sum_{k\geq 1} kP(Y=k) \text{ converge}\\
&\iff \sum_{k\geq 1} kP(X=k) \text{ converge}
\end{aligned}$$

Or, on sait que X admet une espérance donc la dernière série converge et Y admet aussi une espérance. De plus

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{2}P\left(Y=\frac{1}{2}\right)+\sum_{k=1}^{+\infty} kP(Y=k)\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{2}+E(X)\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{2}+\lambda
\end{aligned}$$

Exercice 3

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$\mathrm{d} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} & \longmapsto & ad-bc \end{array}, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr} : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix} & \longmapsto & a+d \end{array}.$$

Pour une matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le *déterminant* de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa *trace*.

(1) **Propriétés de la trace**.

(a) On considère deux réels λ,μ et deux matrices

$$M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N=\begin{pmatrix} x & y\\ z & t\end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}(\lambda M+\mu N) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda a+\mu x & \lambda b+\mu y\\ \lambda c+\mu z & \lambda d+\mu t\end{pmatrix}\right)\\
&= \lambda a+\mu x+\lambda d+\mu t\\
&= \lambda(a+d)+\mu(x+t)\\
&= \lambda\mathrm{tr}(M)+\mu\mathrm{tr}(N)
\end{aligned}$$

et tr est bien linéaire.

(b) On résout

$$\begin{aligned}
M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker(tr)} &\iff \mathrm{tr}(M)=0\\
&\iff d=-a\\
&\iff M=\begin{pmatrix} a & b\\ c & -a\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

et on obtient

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right).$$

Les trois matrices ci-dessus forment également une famille libre (ce qu'on vérifie en écrivant l'équation de liaison qui se résout de manière triviale) et forme donc une base du noyau de tr qui est donc de dimension 3.

(c) Par le théorème du rang, l'image de tr est donc de dimension 1 mais c'est un sous-espace de $\mathbb{R}$ et on a donc $\operatorname{Im}(\operatorname{tr}) = \mathbb{R}$; autrement dit l'application *trace* est surjective (mais elle n'est pas du tout injective comme on l'a vu avec son noyau).

(d) On fait le calcul explicite. Ce n'est pas difficile, juste un peu désagréable. Notant

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix},$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix}ax+bz & ay+bt\\ cx+dz & cy+dt\end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix}xa+yc & xb+yd\\ za+tc & zb+dt\end{pmatrix}$$

et

$$\operatorname{tr}(AB) = ax + bz + cy + dt = \operatorname{tr}(BA).$$

(e) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. D'après la question précédente

$$\operatorname{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \operatorname{tr}\left(PP^{-1}A\right) = \operatorname{tr}(A).$$

(f) Si A et B sont deux matrices semblables, alors il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. D'après la question précédente, on a donc $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(A)$ ainsi, deux matrices semblables ont bien la même trace.
Pour exhiber un contre-exemple, il faudrait trouver deux matrices avec la même trace qui ne sont pas semblables. On sait que deux matrices semblables ont les mêmes propriétés d'inversibilité. On observe que

$$\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right) = 0 = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right)$$

alors que ces deux matrices ne peuvent être semblables; la seconde est clairement inversible (mille et une justifications possibles) alors que la première (la matrice nulle) est la matrice la moins inversible du monde. La réciproque est donc fausse.

(g) Cette question est vraiment triviale;

$$\operatorname{tr}\left({}^t\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}\right) = a + d = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\right).$$

(2) **À propos du déterminant**.

(a) Le calcul (immédiat) donne $\mathrm{d}(2I) = 4$. Or, $\mathrm{d}(I) = 1$ donc $\mathrm{d}(2I) \neq 2 \times \mathrm{d}(I)$ et d n'est pas linéaire.

(b) C'est un calcul. On y va. Notant encore une fois

$$A = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix},$$

on a d'une part

$$AB = \begin{pmatrix}ax+bz & ay+bt\\ cx+dz & cy+dt\end{pmatrix}$$

et il suit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(AB) &= (ax+bz)(cy+dt)-(cx+dz)(ay+bt)\\
&= axcy+axdt+bzcy+bzdt-cxay-cxbt-aydz-dzbt\\
&= axdt+bzcy-cxbt-aydz.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B) = (ad-bc)(xt-yz) = adxt-yzad-bcxy+bcyz.$$

Les quantités sont bien égales, on a bien $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B)$.

(c) On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible.D'après ce qui précède, on a donc $1 = \mathrm{d}(I) = \mathrm{d}\left(PP^{-1}\right) = \mathrm{d}\left(P\right)\mathrm{d}\left(P^{-1}\right)$. Ce produit étant non nul, chaque facteur est nécessairement non nul donc $\mathrm{d}(P) \neq 0$. On a même montré que

$$\mathrm{d}\left(P^{-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{d}(P)}.$$

(d) Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. D'après ce qui précède on peut astucieusement écrire

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(P^{-1}AP) &= \mathrm{d}(P^{-1})\mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P)\\
&= \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P^{-1})\mathrm{d}(P)\\
&= \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P^{-1}P) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(I)\\
&= \mathrm{d}(A).
\end{aligned}$$

(e) Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. D'après la question précédente, on a bien

$$\mathrm{d}(B) = \mathrm{d}(P^{-1}AP) = \mathrm{d}(A)$$

donc deux matrices semblable ont le même déterminant. Concernant la réciproque, on peut utiliser le fait que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme donc ont le même rang et donc un noyau de même dimension. Il est alors facile d'exhiber deux matrices dont le déterminant est nul mais qui auront des noyaux de dimensions différentes et qui ne peuvent donc pas être semblables, fournissant ainsi un contre-exemple et niant la réciproque. Par exemple,

$$\mathrm{d}\left(\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right) = 0 = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right),$$

alors que la première a un noyau égal à tout l'espace (donc de dimension 2) et la seconde un noyau de dimension 1 (engendré par le second vecteur de la base canonique).

(f) C'est encore un calcul trivial.

$$\mathrm{d}\left({}^t\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right) = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\right) = ad-bc = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right).$$

(3) Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$.

D'après ce qui précède on a donc

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D) = \lambda_1+\lambda_2, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}(A) = \mathrm{d}(D) = \lambda_1\lambda_2.$$

(4) Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

(a) C'est un calcul explicite un peu lourd. observant que f^2 est représenté par A^2, et notant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

on a, d'une part

$$f^2(u) = A^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a^2+bc)x + (ab+bd)y \\ (ca+dc)x + (cb+d^2)y \end{pmatrix}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u &= (a+d)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (ad-bc) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (a+d) \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} - (ad-bc) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a^2+bc)x + (ab+bd)y \\ (ca+dc)x + (cb+d^2)y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et on a bien l'égalité voulue, à savoir que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$f^2(u) = \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u.$$

(b) La relation précédente étant vraie pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, elle se traduit par le fait que $f^2 - \mathrm{tr}(A)f + \mathrm{d}(A)\mathrm{id} = 0$ et donc le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \mathrm{d}(A)$ annule f (et A).

(c) On doit donc montrer que si A vérifie $\mathrm{d}(A) \neq 0$, alors A est inversible. En utilisant la question précédente, on a

$$-A^2 + \mathrm{tr}(A)A = \mathrm{d}(A)I$$

et comme $\mathrm{d}(A) \neq 0$, on peut diviser par $\mathrm{d}(A)$. On factorise à gauche par A pour ainsi avoir

$$A \left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{\mathrm{d}(A)} I - \frac{1}{\mathrm{d(A)}A} \right) = I$$

et on peut conclure que A est inversible et même que

$$A^{-1} = \frac{1}{\mathrm{d}(A)} \left(\mathrm{tr}(A)I - A \right).$$

(5) Dans cette question seulement, on suppose que A est **non colinéaire à** I.
On introduit

$$w = e_1 + e_2.$$

(a) (i) Supposons donc qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $f(e_2) = \lambda_2 e_2$. Si $\lambda_1 = \lambda_2$, f serait représenté dans la base canonique par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I,$$

or A n'est pas colinéaire à I, on a donc nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(ii) Supposons qu'on ait simultanément $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $f(w) = \lambda_3 w$, avec λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels (non nécessairement deux à deux distincts). Alors,

$$\begin{aligned} \lambda_3 w &= \lambda_3 e_1 + \lambda_3 e_2 \\ &= f(w) = f(e_1 + e_2) = f(e_1) + f(e_2) \\ &= \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 \end{aligned}$$

ou encore

$$(\lambda_3 - \lambda_1)e_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)e_2 = 0.$$

Mais (e_1, e_2) est une base et donc une famille libre. Nécessairement, on a

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 0 \quad \textbf{et} \quad \lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3,$$

ce qui n'est pas possible d'après la question précédente et fournit donc la contradiction souhaitée.

(b) Si, pour tout x non nul de $\mathbb{R}^2$, on a $(x, f(x))$ liée, alors avec $x = e_1$, puis $x = e_2$ et ensuite $x = w$, on arrive à la situation impossible de la question précédente. Donc, il existe nécessairement un vecteur $x \neq 0$ tel que $(x, f(x))$ soit libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^2$ (car la dimension de $\mathbb{R}^2$ est égale à 2 et on a une famille libre de deux vecteurs).

(c) D'après la Question (4a), on sait que

$$f(f(x)) = f^2(x) = -\mathrm{tr}(A)f(x) + \mathrm{d}(A)x.$$

Il suit que

$$M = \mathrm{Mat}(f, (x, f(x))) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

(d) Comme M et A représentent le même endomorphisme, on vient de montrer que

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\mathrm{tr}(A) \end{pmatrix}.$$

En appliquant le même raisonnement à ${}^tA$ (qui n'est également pas colinéaire à I si A ne l'est pas car ${}^t(\lambda I) = \lambda I$), on a aussi

$${}^tA \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}({}^tA) \\ 1 & -\mathrm{tr}({}^tA) \end{pmatrix}.$$

Or, $\mathrm{tr}({}^tA) = \mathrm{tr}(A)$ et $d({}^tA) = d(A)$ donc

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\mathrm{tr}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}({}^tA) \\ 1 & -\mathrm{tr}({}^tA) \end{pmatrix} \sim {}^tA$$

et la matrice A est bien semblable à sa transposée ${}^tA$.

Problème

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul.

Partie I : Préliminaires

On définit

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

(1) (a) D'après la définition de S_n, on a

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=0}^{1} \binom{2}{1+i} = \binom{2}{1} + \binom{2}{2} \\ &= 2+1=3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=0}^{2} \binom{4}{2+i} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} \\ &= 6+4+1=11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{i=0}^{3} \binom{6}{3+i} = \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} \\ &= 20+15+6+1=42. \end{aligned}$$

(b) On commence par observer que

$$\binom{2n}{n+i} = \frac{(2n)!}{(n+i)!(n-i)!} = \frac{\prod_{j=n-i+1}^{2n} j}{\prod_{j=1}^{n+i} j}$$

ce qui permet de compléter sans mal le programme

```
function y=S(n)
    y=0
    for i=0:n
    y=y+prod(n-i+1:2*n)/prod(1:n+i)
    end
endfunction
```

(c) D'après la formule du binôme de Newton, on a

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} 1^i 1^{2n-i} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

(d) Par définition,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} && \text{(d'une part)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} && \text{(par symétrie)} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n-i} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} \end{aligned}$$

On a donc

$$2S_n = S_n + S_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{j} + \sum_{j=n}^{2n} \binom{2n}{j} = \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j} + \binom{2n}{n}.$$

Ceci permet, avec la question précédente,

$$2S_n = 2^{2n} + \binom{2n}{n},$$

ce qui donne bien, en divisant par 2,

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

(2) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \displaystyle\binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{p+1}}{u_p} &= \frac{\binom{2(p+1)}{p+1} 2^{-2(p+1)}}{\binom{2p}{p} 2^{-2p}} \\
&= \frac{[2(p+1)]!p!p!}{2^2(p+1)!(p+1)!(2p)!} \\
&= \frac{(2p+2)(2p+1)}{2(p+1)2(p+1)} \\
&= \frac{2p+1}{2p+2},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) On raisonne, comme demandé, par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

- initialisation. Pour $p = 1$, on a

$$0 \leq u_1 = \binom{2}{1} 2^{-2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

car $\sqrt{3} \leq \sqrt{4} = 2$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

Alors, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
u_{p+1} &= \frac{2p+1}{2p+2} u_p \leq \frac{2p+1}{2p+2} \frac{1}{\sqrt{2p+1}} = \sqrt{\frac{(2p+1)(2p+1)}{(2p+2)(2p+2)(2p+1)}} \\
&\leq \sqrt{\frac{2p+1}{(2p+2)^2}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\frac{2p+1}{(2p+2)^2} \leq \frac{1}{2p+3} &\iff (2p+1)(2p+3) \leq (2p+2)^2 \\
&\iff 4p^2 + 8p + 3 \leq 4p^2 + 8p + 4 \\
&\iff 3 \leq 4,
\end{aligned}$$

ce qui est vrai. On a donc la majoration voulue et la récurrence est terminée.

En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq u_p \leq \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

(c) Par théorème des gendarmes, on peut donc conclure que

$$\lim_{p \to +\infty} u_p = 0.$$

Partie II : Cours en bourse d'une action

On suppose les variations journalières d'une action indépendantes les unes des autres. On convient de noter $X_0 = 0$ le cours correspondant au jour $j = 0$ (début de l'observation), et on suppose que, chaque jour, le cours:

- monte d'une unité ($+1$) avec une probabilité p ($0 < p < 1$);
- ou descend d'une unité (-1) avec la probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours constaté le $2n^{ième}$ jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième jour, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

(3) **Simulation sous** `SciLab`

(a) Sans difficulté.

```
function x=X(n, p)
    x=0
    for k=1:2*n
       if rand() <p then
          x=x+1
       else
          x=x-1
       end
    end
endfunction
```

(b) Dans le cas où $p = 1/2$, la liste L contient 1000 réalisations de la variable X_{2n}. La commande `length(find(L>=0))/1000` renvoie la fréquence du nombre de réalisations où $X_{2n} \geq 0$. On représente ensuite graphiquement l'évolution de cette fréquence pour n variant de 10 en 10 entre 10 et 1000. Le nuage de points semble relativement concentré autour de $1/2$. Il est raisonnable de conjecturer que, dans le cas $p = 1/2$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P(X_{2n} \geq 0) = \frac{1}{2}.$$

(4) Dans le pire des cas, on peut perdre 1 euro chaque jour pendant $2n$ jours et dans le meilleur des cas, gagner 1 euro chaque jour. Toutes les situations intermédiaires sont possibles, donc

$$X_{2n}(\Omega) = [\![-2n; 2n]\!].$$

(5) On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté, et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

(a) Les $2n$ jours se répartissent entre ceux où l'action monte et ceux où elle descend. Il est alors clair que

$$Y_{2n} + Z_{2n} = 2n.$$

(b) Y_{2n} (resp. Z_{2n}) compte, parmi les $2n$ répétitions (chaque jour on répète le processus), le nombre de succès (l'action monte - resp. l'action baisse). Les évolutions étant indépendantes chaque jour, on a un schéma de Bernoulli répété de manière indépendante et donc des lois binomiales:

$$Y_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, p), \qquad Z_{2n} \hookrightarrow \mathcal{B}(2n, q).$$

Le cours donne directement

$$E(Y_{2n}) = 2np, \quad V(Y_{2n}) = 2npq, \quad E(Z_{2n}) = 2nq, \quad V(Z_{2n}) = 2nqp.$$

(c) Comme $Z_{2n} = 2n - Y_{2n}$, on a

$$\mathrm{Cov}(Y_{2n}, Z_{2n}) = \mathrm{Cov}(Y_{2n}, 2n - Y_{2n}) = 0 - \mathrm{Cov}(Y_{2n}, Y_{2n}) = -V(Y_{2n}) = -2npq.$$

La covariance étant négative, les deux variables évoluent de manière opposée, ce qui est assez intuitif. Plus le nombre de jours où l'action monte est grand, plus celui où elle baisse est petit...

(6) Chaque jour où l'action monte, on gagne 1 euro, il y a Y_{2n} jours où elle monte. Pour les Z_{2n} jours restant on perd 1 euros donc on "gagne" -1 euro. Au final, on a clairement

$$X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n}.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(X_{2n}) = E(Y_{2n} - Z_{2n}) = E(Y_{2n}) - E(Z_{2n}) = 2np - 2nq = 2n(p-q).$$

Si $p = q = 1/2$, cette espérance est nulle, ce qui n'est pas surprenant. S'il est équiprobable que l'action monte ou descende chaque jours, après un nombre pair de jours, en son cours est en moyenne nul.

(7) Soit $k \in [\![-n; n]\!]$. Remarquant que $X_{2n} = Y_{2n} - Z_{2n} = 2Y_{2n} - 2n$, et que $n + k \in [\![0; 2n]\!]$, on a

$$P(X_{2n} = 2k) \quad = \quad P(2Y_{2n} - 2n = 2k) = P(Y_{2n} = n + k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k},$$

ce qu'on voulait.

(8) On suppose, dans cette question que $p = 1/2$. On note $p_n = P(X_{2n} \geq 0)$.
On a, d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
p_n &= P(X_{2n} \geq 0) = \sum_{k=0}^{n} P(X_{2n} = 2k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+k} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{n+k} = 2^{-2n} S_n \\
&= 2^{-2n} \left(2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right) \qquad \text{(d'après la Question (1}d\text{))} \\
&= \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)},
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.
On utilise la première question du préambule.

$$\begin{aligned}
p_1 &= 2^{-2} S_1 = \frac{3}{4}, \\
p_2 &= 2^{-4} S_2 = \frac{11}{16} \\
p_3 &= 2^{-6} S_3 = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}.
\end{aligned}$$

On observe aussi que

$$p_n = \frac{1}{2}\left(1 + u_n\right).$$

En particulier,

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{2},$$

ce qu'on avait conjecturé à l'aide de `SciLab`.