ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Concours Blanc n°4 - Sujet B

Mercredi 7 Mars
Durée : 4 heures

Exercice 1

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et par $\mathcal{B}$ sa base canonique: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$.
On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$, et on introduit les deux sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}(e_4, e_5, e_6).$$

On considère alors l'endomorphisme u de E_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 2\}$.
Déterminer une base de E_1 formée de vecteurs propres de A.

Soit f l'application linéaire de E_1 vers E_2 définie par

$$\forall i \in [\![1;3]\!], \qquad f(e_i) = e_{i+3}.$$

(2) Montrer que f est un isomorphisme et déterminer la matrice de son isomorphisme réciproque f^{-1} relativement aux bases $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_1$.

(3) (a) Montrer que pour tout $x \in E$, il existe un couple de vecteurs $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
(b) Montrer que, si (x_1, x_2) est un élément de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = 0$, les vecteurs x_1 et x_2 sont nuls.
(c) En déduire que, si (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$, alors

$$(x_1 + x_2 = y_1 + y_2) \Longrightarrow (x_1 = y_1 \quad \text{et} \quad x_2 = y_2).$$

On vient de montrer que tout vecteur x de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

On définit une nouvelle application φ sur E comme suit. Si $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, alors

$$\varphi(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2).$$

(4) (a) Montrer que φ définit bien un endomorphisme de E.
(b) Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ est un automorphisme.

(c) Montrer que la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$ peut s'écrire sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(5) On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de φ et que $x = x_1 + x_2$ est un vecteur propre associé à μ, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

(a) Justifier que la valeur propre μ n'est pas nulle.
(b) Utiliser les résultats de la Question (3) pour prouver que les vecteurs x_1 et x_2 sont tous les deux non nuls et que x_1 est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $\mu - 1/\mu$.

(6) Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{x}.$$

(7) On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associé à λ.

(a) Montrer que l'équation $h(\mu) = \lambda$ admet deux solutions distinctes μ_1 et μ_2.
(b) Montrer que μ_1 et μ_2 sont des valeurs propres de φ.
Donner, en fonction de x_1, un vecteur propre de φ associé à μ_1 et un vecteur propre de φ associé à μ_2.

(8) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

Dans cet exercice, on admet le résultat ci-dessous, appelé *lemme de Cesaro*.
Si une suite (a_n) converge vers le réel ℓ, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$.

(1) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a $0 \leqslant u_n < 1$.
(b) Étudier les variations de la suite (u_n).
(c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

(2) Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$.

(a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right) = \frac{1}{2}.$$

(b) Utiliser le *lemme de Cesaro* pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(c) En déduire que
$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
(d) La série $\sum v_n$ est-elle convergente?

(3) (a) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=u(n)` qui renvoie la valeur de u_n.
(b) En déduire un programme, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1 - u_n < 10^{-3}$.

On introduit maintenant la suite (p_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par
$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$$
et on note $\omega_n = \ln(p_n)$.

(4) (a) Justifier que la suite (ω_n) est bien définie.
(b) Expliciter une suite (a_n) telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$\omega_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
(c) Déterminer, à l'aide d'un développement limité usuel, la limite de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(d) À l'aide du *lemme de Cesaro*, en déduire la limite de p_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un $n-$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. On pose $L_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

(1) Déterminer les fonctions de répartition des variables L_n puis M_n.

(2) Quelle est la loi de la variable $Y_n = n\lambda L_n$?

(3) On maintenant alors $Z_n = \lambda M_n - \ln(n)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition F_n de Z_n.
(b) Pour $t \in \mathbb{R}$, déterminer la limite $F(t)$ de $F_n(t)$ lorsque $n \to +\infty$.
(c) En déduire soigneusement que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire à densité, que l'on notera Z. (*On dit que Z suit la loi de Gumbel.*)

La durée de vie d'une ampoule est modélisée par une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ est inconnu. On cherche à estimer la durée de vide moyenne $\mu = E(X) = 1/\lambda$ et on dispose d'un échantillon de n ampoules (dont les durées de vie sont supposées indépendantes).

(4) Dans cette question, on suppose que la seule information dont on dispose est la durée de vie de l'ampoule qui a *grillé* le plus tôt.

(a) À l'aide de la Question (2), proposer un estimateur $\tilde{L}_n$ de μ, construit à partir de L_n, qui soit sans biais.
(b) Quel est son risque quadratique?

(c) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\tilde{L}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) = 1 - e^{-1+\lambda\varepsilon} + e^{-1-\lambda\varepsilon}.$$

(d) L'estimateur $\tilde{L}_n$ est-il convergent?

(e) Soit $\alpha \in]0;1[$. Montrer que si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, alors

$$P\left(Y < -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = P\left(Y > -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}.$$

(f) Montrer alors que l'intervalle

$$I_{\alpha,n} = \left[\frac{\tilde{L}_n}{-\ln(\alpha/2)}, \frac{\tilde{L}_n}{-\ln(1-\alpha/2)}\right]$$

est un intervalle de confiance au seuil $1 - \alpha$ pour μ.

Remarque. On aurait pu utiliser la convergence en loi de Z_n pour obtenir un intervalle de confiance asymptotique pour μ (après avoir fait calculer les *quantiles* de la *loi de Gumbel*)

$$J_{\alpha,n} = \left[\frac{M_n}{\ln(n) - \ln\left(-\ln(1-\alpha/2)\right)}; \frac{M_n}{\ln(n) - \ln\left(-\ln(\alpha/2)\right)}\right].$$

Problème

Dans tout l'exercice, on dispose d'une pièce amenant *Pile* avec la probabilité $1/3$.

Les parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

Partie I. Conditionnement par une loi de Poisson

Soit λ un réel strictement positif et N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que N donne le nombre de lancers successifs de la pièce.
Autrement dit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $N = i$ alors on lance i fois de suite la pièce et on note :

- X le nombre de *Pile* obtenus lors de ces i lancers.
- Y le nombre de *Face* obtenus lors de ces i lancers.

(1) Soit $i \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = i]$.

(2) Montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

(3) Prouver que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
On admet de même que Y suit la loi de Poisson de paramètres $2\lambda/3$.

(4) Que vaut $X + Y$?
Prouver que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(5) Toujours en considérant la variable aléatoire $X + Y$, calculer la covariance de X et de N.
Comment peut-on interpréter le signe de cette covariance ?

Partie II. Conditionnement par une loi binomiale

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite la pièce et on note N le nombre de lancers ayant amené *Face*.

On relance alors la pièce autant de fois que l'on a obtenu *Face* lors de la première série de lancers.

Autrement dit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, si $N = i$ alors on relance i fois de suite la pièce et on note

- X le nombre de *Pile* obtenus lors de ces i lancers.
- Y le nombre de *Face* obtenus lors de ces i lancers.

(6) Déterminer la loi de N.

(7) *Dans cette question seulement on suppose que* $n = 2$.
  (a) Expliciter la loi de N.
  (b) Déterminer la table de la loi conjointe de N et de X.
  (c) En déduire la loi marginale de X ainsi que la covariance de X et de N.

(8) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = i]$.

(9) Montrer que si $0 \leq k \leq i \leq n$ alors :
$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$

(10) Montrer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $2/9$.
On admet de même que Y *suit la loi binomiale de paramètres* n *et* $4/9$.

(11) Prouver que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

(12) En considérant la variable aléatoire $X + Y$, calculer la covariance de X et de Y.
Comment peut-on interpréter le signe de cette covariance ?