ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Concours Blanc n°4 - Sujet B

Solution

Exercice 1

Cet exercice provient d'une annale **ESCP 2004**.

On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^6$ et par $\mathcal{B}$ sa base canonique: $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6)$. On pose $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}_2 = (e_4, e_5, e_6)$, et on introduit les deux sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, e_3), \qquad E_2 = \mathrm{Vect}(e_4, e_5, e_6).$$

On considère alors l'endomorphisme u de E_1 dont la matrice dans la base $\mathcal{B}_1$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) On peut ici vérifier que chacune des valeurs proposées est bien valeur propre de A en explicitant au passage une base de chaque sous-espace propre associé.

- Pour $\lambda = -2$. On a

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A+2I) &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ -2x + 2y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = -2y \end{cases} \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, -2 est bien valeur propre de A et $E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $\lambda = -1$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A+I) \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 2x+y+z & = & 0 \\ -2x+2y & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+2y+z & = & 0 \\ 3y+z & = & 0 \\ 6y+2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & -3y \end{array} \right.$$

$$\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Ainsi, -1 est bien valeur propre de A et $E_{-1}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $\lambda = 2$. On a

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A-2I) \iff \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-2y+z & = & 0 \\ -2x+2y+z & = & 0 \\ -2x+2y-3z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & y \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, 2 est bien valeur propre de A et $E_2(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

A admet trois valeurs propres; elle est donc diagonalisable: il existe donc une base de l'espace E_1 formée uniquement de vecteurs propres de A (dans laquelle l'endomorphisme est diagonale). Plus précisément, le principe de concaténation permet d'affirmer que la famille de vecteurs

$$\tilde{\mathcal{B}_1} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

forme une base de E_1 et chacun de ses éléments est bien un vecteur propre de A.

Soit f l'application linéaire de E_1 vers E_2 définie par

$$\forall i \in [\![1;3]\!], \qquad f(e_i) = e_{i+3}.$$

(2) Il est très clair que f est bijectif. En effet, l'image de la base $\mathcal{B}_1$ est la base $\mathcal{B}_2$ donc le rang de f vaut 3 et son noyau est donc réduit à $\{0_{E_1}\}$. Il est tout aussi clair que, pour tout $j \in [\![4;6]\!]$, $f^{-1}(e_j) = e_{j-3}$

ce qui permet d'écrire

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = I.$$

(3) (a) Soit $x \in E$. Alors, en utilisant la décomposition dans la base $\mathcal{B}$ de E, on peut écrire

$$x = \sum_{i=1}^{6} a_i e_i.$$

En posant $x_1 = \sum_{i=1}^{3} a_i e_i \in E_1$ et $x_2 = \sum_{i=4}^{6} a_i e_i \in E_2$, on a bien $x = x_1 + x_2$.

(b) Soit (x_1, x_2) est un élément de $E_1 \times E_2$ vérifiant l'égalité $x_1 + x_2 = 0$. Comme $x_1 \in E_1$, x_1 se décompose comme combinaison des vecteurs e_1, e_2 et e_3, on peut écrire $x_1 = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$. De le même manière, $x_2 = \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6$. Mais alors

$$0 = x_1 + x_2 = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i e_i \Longrightarrow \forall i \in [\![1; 6]\!], \quad \alpha_i = 0$$

car $(e_1, e_2, ..., e_6)$ base de E (donc famille libre). Il suit bien que $x_1 = x_2 = 0$.

(c) Soient (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont deux éléments de $E_1 \times E_2$, tels que

$$(x_1 + x_2 = y_1 + y_2).$$

Alors, on a

$$(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$$

Or, $x_1 - y_1 \in E_1$ et $x_2 - y_2 \in E_2$. En appliquant la question précédente, on a donc

$$x_1 - y_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_2 - y_2 = 0$$

ou encore

$$x_1 = y_1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = y_2.$$

On vient de montrer que tout vecteur x de E se décompose de manière unique comme somme d'un élément de E_1 et d'un élément de E_2.

On définit une nouvelle application φ sur E comme suit. Si $x = x_1 + x_2 \in E$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, alors

$$\varphi(x) = u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2).$$

(4) (a) Commençons par vérifier que φ est définie de E dans E. En effet, l'application u envoie x_1 sur un élément de E_1 donc de E. L'application f envoie x_1 sur un élément de E_2 donc de E et f^{-1} envoie x_2 sur un élément de E_1 donc de E. Toute combinaison d'éléments de E étant encore un élément de E, φ est bien à valeurs dans E.

Soient maintenant $x = x_1 + x_2 \in E$, $y = y_1 + y_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Commençons par voir que

$$\alpha x + \beta y = (\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2)$$

et par unicité de la décomposition montrée ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x + \beta y) &= u\left(\alpha x_1 + \beta y_1\right) + f\left(\alpha x_1 + \beta y_1\right) + f^{-1}\left(\alpha x_2 + \beta y_2\right) \\
&= \alpha u(x_1) + \beta u(y_1) + \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) + \alpha f^{-1}(x_2) + \beta f^{-1}(y_2) \\
&= \alpha\left(u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2)\right) + \beta\left(u(y_1) + f(y_1) + f^{-1}(y_2)\right) \\
&= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y)
\end{aligned}$$

et φ est bien linéaire. Bilan: c'est bien un endomorphisme de E.

(b) Soit $x = x_1 + x_2 \in E$ tel que $\varphi(x) = 0$. On a alors $u(x_1) + f(x_1) + f^{-1}(x_2) = 0$. Mais, $u(x_1) + f^{-1}(x_2) \in E_1$ et $f(x_1) \in E_2$. On peut donc appliquer le résultat de la Question (3b). On a donc

$$u(x_1) + f^{-1}(x_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x_1) = 0.$$

Comme f est un isomorphisme, $f(x_1) = 0$ implique que $x_1 = 0$. Mais alors il suit que $u_1(x_1) = 0$ et qu'on a maintenant $f^{-1}(x_2) = 0$ ce qui implique, toujours par bijectivité, que $x_2 = 0$. Au final, on a bien $x_1 = x_2 = 0$ donc $x = 0$ et φ est bien un automorphisme car son noyau est réduit à $\{0_E\}$.

(c) Il suffit de calculer l'image par φ de chacun des six vecteurs de la base $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(e_1) &=& u(e_1) + f(e_1) = 2e_2 - 2e_3 + e_4 \\ \varphi(e_2) &=& u(e_2) + f(e_2) = 2e_1 + 2e_3 + e_5 \\ \varphi(e_3) &=& u(e_3) + f(e_3) = e_1 + e_2 - e_3 + e_6 \\ \varphi(e_4) &=& f^{-1}(e_4) = e_1 \\ \varphi(e_5) &=& f^{-1}(e_5) = e_2 \\ \varphi(e_6) &=& f^{-1}(e_6) = e_3 \end{array}$$

ce qui donne bien

$$\mathrm{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) = M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5) On suppose, dans cette question, que μ est une valeur propre de φ et que $x = x_1 + x_2$ est un vecteur propre associé à μ, avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$.

(a) Comme φ est un automorphisme, 0 n'est pas valeur propre de φ et $\mu \neq 0$.

(b) Comme $x = x_1 + x_2 \neq 0$ (car un vecteur propre est non nul), on ne peut pas avoir $x_1 = x_2 = 0$. On a nécessairement $x_1 \neq 0$ ou $x_2 \neq 0$. Comme de plus

$$\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix},$$

on a en particulier $x_1 = \mu x_2$ avec $\mu \neq 0$, ce qui implique nécessairement que $x_1 \pm neq 0$ **et** $x_2 \neq 0$. De plus,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Ax_1 + x_2 &=& \mu x_1 \\ x_1 &=& \mu x_2 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 &=& \dfrac{1}{\mu} x_1 \\ Ax_1 &=& \mu x_1 - \dfrac{1}{\mu} x_1 = \left(\mu - \dfrac{1}{\mu}\right) x_1 \end{array} \right.$$

En particulier, comme $x_1 \neq 0$, on a que x_1 est un vecteur propre de u (ou de A, c'est la même chose) associé à la valeur propre $\mu - 1/\mu$.

(6) La fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$h(x) = x - \frac{1}{x}$$

étant différence d'un monôme et de la fonction inverse, toutes deux dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, elle l'est aussi et

$$h'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$$

donc h est strictement croissante sur chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. On remarque en particulier que la restriction de h à chacun de des deux intervalles réalise une bijection de ces derniers sur $\mathbb{R}$ (par le théorème de bijection).

(7) On suppose, dans cette question, que λ est une valeur propre de u et que x_1 est un vecteur propre de u associé à λ.

(a) D'après la question précédente et le théorème de bijection, on a bien une solution de $h(\mu) = \lambda$ dans chacun des intervalles $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, que l'on note μ_1 et μ_2.

(b) Posons $x_2 = \frac{1}{\mu_1}x_1$ et $y_2 = \frac{1}{\mu_2}x_1$. Alors, il est assez clair que les vecteurs $x = x_1 + x_2$ et $y = x_1 + y_2$ sont tous les deux des vecteurs propres de φ associés respectivement à μ_1 et à μ_2. En effet, comme

$$\lambda = \mu_1 - \frac{1}{\mu_1},$$

on a

$$\varphi(x) = M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \dfrac{1}{\mu_1}x_1 \\ \mu_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\mu_1 - \dfrac{1}{\mu_1}\right)x_1 + \dfrac{1}{\mu_1}x_1 \\ \mu_1 x_2 \end{pmatrix} = \mu_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et x est bien vecteur propre de φ associé à μ_1. Même chose pour y avec μ_2.

(8) D'après la question précédente, pour chaque valeur propre λ de u, on peut obtenir deux valeurs propres distinctes (solutions de $h(\mu) = \lambda$) de φ. En partant des 3 valeurs propres $-2, -1$ et 2 de u, on a donc 6 valeurs propres **distinctes** de φ (que l'on peut même expliciter : $1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm \sqrt{2}$, $(-1 \pm \sqrt{5})/2$) et donc M est bien diagonalisable.

Exercice 2

Cet exercice est une version augmentée d'un exercice du sujet **EDHEC 2012**.

Dans cet exercice, on admet le résultat ci-dessous, appelé *lemme de Cesaro*.
Si une suite (a_n) converge vers le réel ℓ, alors

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} a_j = \ell$$

On se propose d'étudier la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= \frac{u_n^2+1}{2} \end{cases}$.

(1) (a) C'est une récurrence très facile. Commençons par introduire la fonction polynomiale $f : x \mapsto (x^2+1)/2$ dont la dérivée vaut $f'(x) = x$, quantité positive sur $[0;1]$. On aura observé qu'on a de telle sorte $u_{n+1} = f(u_n)$.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a bien $u_0 = 0 \in [0,1]$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \in [0,1]$. Alors, par croissance de f sur $[0;1]$, on a

$$0 \leq \frac{1}{2} = f(0) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(1) = 1.$$

La récurrence est terminée.

(b) Il est facile ici de voir que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2+1}{2} - u_n = \frac{(u_n-1)^2}{2} \geq 0$$

ainsi (u_n) est croissante.

(c) Par le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) étant croissante et majorée (par 1), elle converge vers une certaine limite $\ell \in [0;1]$. Par continuité de f sur $[0;1]$ (et donc en ℓ), le passage à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ donne $\ell = f(\ell)$. Or,

$$f(x) = x \iff \frac{(x-1)^2}{2} = 0 \iff x = 1$$

Donc (u_n) converge vers 1.

(2) Pour tout entier naturel n on pose, $v_n = 1 - u_n$. En particulier, la dernière question permet de voir que $v_n \to 0,\ n \to +\infty$.

(a) On calcule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1-u_{n+1}} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{u_n^2+1}{2}} - \frac{1}{1-u_n} = \frac{2}{1-u_n^2} - \frac{1}{1-u_n} \\
&= \frac{1}{1-u_n}\left(\frac{2}{1+u_n} - 1\right) = \frac{1}{1+u_n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

car $u_n \to 1$ donc $1 + u_n \to 2$.

(b) On utilise, comme indiqué, le *lemme de Cesaro*, mais aussi un télescopage. En effet, observons que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_0}\right).$$

Comme $v_0 = 1 - u_0 = 1$, on a

$$\frac{1}{nv_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2},$$

par le lemme de Cesaro.
Ceci se reformule comme le fait que

$$v_n \sim \frac{2}{n}, \quad n \to +\infty.$$

(c) De la définition de v_n et de la question précédente, on peut écrire

$$1 - u_n = v_n = \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ou encore

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(d) Par critère de comparaison par équivalence (pour les séries à termes positifs) à une série de Riemann divergente ($\sum 2/n$ diverge), on peut conclure que la série $\sum v_n$ diverge également.

(3) (a) C'est un programme très basique et sans difficulté, qui utilise une boucle `for`.

```
function y=u(n)
    y=0
    for k=1:n
        y=(y^2+1)/2
    end
endfunction
```

(b) On continue à calculer n tant que (c'est à dire avec une boucle `while`) la condition n'est pas satisfaite.

```
n=0
while 1-u(n)>=10^(-3)
    n=n+1
end
disp(n)
```

On introduit maintenant la suite (p_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}$$

et on note $\omega_n = \ln(p_n)$.

(4) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}} \geq 1$$

donc $p_n \geq 1 > 0$ et $\omega_n = \ln(p_n)$ est bien défini.

(b) Avec les propriétés du log, on a

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\left(1 + \frac{2}{k}\right)^{\frac{k}{n}}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k,
\end{aligned}$$

où on a bien sûr posé $a_k = k \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)$.

(c) On a bien sûr, comme $2/k \to 0,\ k \to +\infty$ et $\ln(1+u) \sim u,\ u \to 0$,

$$a_k = k \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right) \sim k \times \frac{2}{k} = 2 \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 2.$$

(d) À l'aide du *lemme de Cesaro*, on en déduit que $\omega_n \to 2$ puis par composition des limites (par la fonction exponentielle qui est continue), on a $p_n \to e^2,\ n \to +\infty$.

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un $n-$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$. On pose $L_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

(1) Il y a un peu de travail pour cette question mais c'est du classique de chez classique.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} F_{M_n}(t) &= P(M_n \leq t) = P(\max(X_1, ..., X_n) \leq t) \\ &= P([X_1 \leq t] \cap [X_2 \leq t] \cap ... \cap [X_n \leq t]) \\ &= P(X_1 \leq t)P(X_2 \leq t)...P(X_n \leq t) \qquad \text{(par indépendance des } X_i\text{)} \\ &= P(X_1 \leq t)^n \qquad \text{(car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^n, & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} F_{L_n}(t) &= P(L_n \leq t) = 1 - P(L_n > t) = 1 - P(\min(X_1, ..., X_n) > t) \\ &= 1 - P([X_1 > t] \cap [X_2 > t] \cap ... \cap [X_n > t]) \\ &= 1 - P(X_1 > t)P(X_2 > t)...P(X_n > t) \qquad \text{(par indépendance des } X_i\text{)} \\ &= 1 - P(X_1 > t)^n \qquad \text{(car les } X_i \text{ suivent toutes la même loi)} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En particulier, on observe que $L_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n\lambda)$.

(2) Sans difficulté :

$$\begin{aligned} F_{Y_n}(t) &= P(Y_n \leq t) = P(nL_n \leq t) = P\left(L_n \leq \frac{t}{n}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-n\lambda \frac{t}{n}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et on peut donc affirmer que $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

(3) On maintenant alors $Z_n = \lambda M_n - \ln(n)$.

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
F_{Z_n}(t) &= P(Z_n \leq t) = P(\lambda M_n - \ln(n) \leq t) \\
&= P\left(M_n \leq \frac{t+\ln(n)}{\lambda}\right) \\
&= F_{M_n}\left(\frac{t+\ln(n)}{\lambda}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\ln(n) \\ \left(1-e^{-t-\ln(n)}\right)^n, & \text{si } t \geq -\ln(n) \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t < -\ln(n) \\ \left(1-\frac{e^{-t}}{n}\right)^n, & \text{si } t \geq -\ln(n) \end{cases}
\end{aligned}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\ln(n) \to +\infty$, on a, pour n assez grand, $t \geq -\ln(n)$.
Comme $e^{-t}/n \to 0$, on peut utiliser l'équivalent de $\ln(1+u)$ en 0.

$$\left(1-\frac{e^{-t}}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1-\frac{e^{-t}}{n}\right)\right).$$

Or,

$$n\ln\left(1-\frac{e^{-t}}{n}\right) \sim n\left(-\frac{e^{-t}}{n}\right) = -e^{-t} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{-t}.$$

Par composition par l'exponentielle on a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$F_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp\left(-e^{-t}\right) = F(t).$$

(c) Il suffit de vérifier que la fonction F définie ci-dessus est bien la fonction de répartition d'une variable à densité. Il faut à la fois montrer que c'est une fonction de répartition (croissance sur $\mathbb{R}$, bonnes limites aux bords) et d'une variable à densité (continuité partout sur $\mathbb{R}$ et caractère $\mathcal{C}^1$ "presque partout"). C'est le cas:

- $F(t) \to 0, t \to -\infty$, $F(t) \to 1$, $t \to +\infty$;
- F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (comme composée d'exponentielle par une exponentielle) et donc *a fortiori* continue sur $\mathbb{R}$
- $F'(t) = e^{-t}\exp\left(-e^{-t}\right) > 0$ et F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Il y a donc convergence en loi de Y_n vers une variable Z dont la fonction de répartition est donnée par la fonction F.

La durée de vie d'une ampoule est modélisée par une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$ est inconnu. On cherche à estimer la durée de vide moyenne $\mu = E(X) = 1/\lambda$ et on dispose d'un échantillon de n ampoules (dont les durées de vie sont supposées indépendantes).

(4) Dans cette question, on suppose que la seule information dont on dispose est la durée de vie de l'ampoule qui a *grillé* le plus tôt; c'est à dire qu'on a une observation de L_n.

(a) Il faut commencer par calculer $E(L_n)$. Comme on a reconnu la loi de L_n, on connait sont espérance d'après le cours sans calcul supplémentaire : $E(L_n) = \dfrac{1}{\lambda n}$.

Pour estimer sans biais $\mu = 1/\lambda$, il suffit, par linéarité de l'espérance de poser

$$\tilde{L}_n = nL_n.$$

(b) L'estimateur étant sans biais, son risque quadratique est égal à sa variance. On a donc

$$r(\tilde{L}_n) = V(\tilde{L}_n) = V(nL_n) = n^2 V(L_n) = \frac{n^2}{n^2\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

On ne peut pas utiliser Bienaymé-Tchebychev pour conclure que l'estimateur est convergent car le risque ne tend pas vers 0 mais attention, on ne peut pas non plus conclure qu'il n'est pas convergent; il faut calculer la probabilité ci-dessous.

(c) Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \left|\tilde{L}_n - \mu\right| \le \varepsilon &\iff -\varepsilon \le \tilde{L}_n - \frac{1}{\lambda} \le \varepsilon \\ &\iff -\varepsilon + \frac{1}{\lambda} \le \tilde{L}_n \le \varepsilon + \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Or, d'après la Question (2), on sait que $\tilde{L}_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ donc

$$\begin{aligned} P\left(\left|\tilde{L}_n - \mu\right| > \varepsilon\right) &= 1 - P\left(\left|\tilde{L}_n - \mu\right| \le \varepsilon\right) \\ &= 1 - P\left(-\varepsilon + \frac{1}{\lambda} \le \tilde{L}_n \le \varepsilon + \frac{1}{\lambda}\right) \\ &= 1 - \left(\left(1 - e^{-\lambda\left(\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\right)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda\left(-\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\right)}\right)\right) \\ &= 1 - e^{-1+\lambda\varepsilon} + e^{-1-\lambda\varepsilon}. \end{aligned}$$

(d) D'après la question précédente, $P\left(\left|\tilde{L}_n - \mu\right| > \varepsilon\right)$ ne tend pas vers 0 lorsque $n \to +\infty$ (l'expression ne dépend même pas de n !!!), et l'estimateur n'est donc pas convergent.

(e) Soient $\alpha \in]0;1[$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Alors, comme

$$1 - \frac{\alpha}{2} \in]0;1[, \quad \ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) < 0 \quad \text{et} \quad -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) > 0.$$

De même,

$$-\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right) > 0$$

donc

$$\begin{aligned} P\left(Y < -\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) &= 1 - e^{\ln\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\alpha}{2} \\ P\left(Y > -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) &= 1 - P\left(Y \le -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 1 - \left(1 - e^{\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right) = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

(f) On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned} \mu \in I_{\alpha,n} &\iff \begin{cases} \dfrac{\tilde{L}_n}{-\ln(\alpha/2)} & \le \mu \\ \dfrac{\tilde{L}_n}{-\ln(1-\alpha/2)} & \ge \mu \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \lambda\tilde{L}_n & \le -\ln(\alpha/2) \\ \lambda\tilde{L}_n & \ge -\ln(1-\alpha/2) \end{cases} \\ &\iff \lambda\tilde{L}_n \in [-\ln(1-\alpha/2);\ -\ln(\alpha/2)] \end{aligned}$$

Or, comme $\tilde{L}_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, un résultat du cours (facile à redémontrer avec un calcul rapide de fonction de répartition), permet d'affirmer que $\lambda\tilde{L}_n \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Ainsi, la question précédente permet d'écrire que

$$\begin{aligned} P(\mu \in I_{\alpha,n}) &= P\left(Y \leq -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - P\left(Y < -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 1 - P\left(Y > -\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - P\left(Y < -\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1-\alpha \end{aligned}$$

et $I_{\alpha,n}$ est bien un intervalle de confiance au seuil $1-\alpha$ pour μ.

Remarque. On aurait pu utiliser la convergence en loi de Z_n pour obtenir un intervalle de confiance asymptotique pour μ (après avoir fait calculer les *quantiles* de la *loi de Gumbel*)

$$J_{\alpha,n} = \left[\frac{M_n}{\ln(n) - \ln(-\ln(1-\alpha/2))} ; \frac{M_n}{\ln(n) - \ln(-\ln(\alpha/2))}\right].$$

Problème

Partie I

(1) Soit $i \in \mathbb{N}$.

Sachant $[N = i]$, on reconnait une répétition de schéma de Bernoulli où le succès correspond à obtenir *Pile* (avec probabilité $1/3$). Sachant $[N = i]$, X donne le nombre de succès obtenus lors de i épreuves identiques et indépendantes. On en déduit que

$$\text{sachant } [N = i],\ X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(i, \frac{1}{3}\right).$$

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{[N = i] : i \in \mathbb{N}\}$, on a

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

Or si $i < k$, alors il est impossible d'obtenir k fois *Pile* lors de i lancers. Donc si $i < k$, alors $P_{[N=i]}(X = k) = 0$. Il ne reste donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

(3) Le nombre N de lancers effectués pouvant être aussi grand que l'on veut (puisque $N(\Omega) = \mathbb{N}$), le nombre de *Pile* obtenus peut aussi être aussi grand que l'on veut.

Donc $X(\Omega)=\mathbb{N}$. Fixons $k\in\mathbb{N}$. On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \sum_{i=k}^{+\infty}\binom{i}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{i-k} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^i}{i!}\\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{1}{3}\right)^k \lambda^k \sum_{i=k}^{+\infty}\frac{i!}{k!\,(i-k)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-k}\frac{\lambda^{i-k}}{i!}\\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\frac{1}{k!}\sum_{i=k}^{+\infty}\frac{1}{(i-k)!}\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^{i-k}\\
&\underset{j=i-k}{=} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^{j}\\
&= e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\frac{1}{k!}\,e^{2\lambda/3}
\end{aligned}$$

En réorganisant les termes, il vient

$$\forall\, k\in\mathbb{N},\quad P(X=k)=e^{-\lambda/3}\,\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k.$$

On en déduit que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)$.

(4) $X+Y$ donne le nombre de Piles et de Faces obtenus, autrement dit donne le nombre total de lancers effectués. Ainsi

$$X+Y=N.$$

On a alors pour tous $k,j\in\mathbb{N}$:

$$P\big([X=k]\cap[Y=j]\big)=P\big([X=k]\cap[X+Y=k+j]\big)=P\big([X=k]\cap[N=k+j]\big)=P_{[N=k+j]}(X=k)P(N=k+j).$$

D'après la Question 1., on obtient pour tous $k,j\in\mathbb{N}$

$$P\big([X=k]\cap[Y=j]\big)=\binom{k+j}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{k+j-k} e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!}=\frac{1}{k!\,j!}\,e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^j.$$

En remarquant que $e^{-\lambda}=e^{-\lambda/3}\times e^{-2\lambda/3}$, il vient pour tous $k,j\in\mathbb{N}$:

$$P\big([X=k]\cap[Y=j]\big)=e^{-\lambda/3}\,\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^k\times e^{-2\lambda/3}\,\frac{1}{j!}\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^j=P(X=k)\times P(Y=j).$$

On en déduit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(5) On a par les propriétés de la covariance

$$\mathrm{Cov}(X,N)=\mathrm{Cov}(X,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=V(X)+\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$. On sait de plus que $X\hookrightarrow\mathcal{P}\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)$, donc :

$$\mathrm{Cov}(X,N)=\frac{\lambda}{3}+0\qquad\text{c'est-à-dire :}\quad\boxed{\mathrm{Cov}(X,N)=\frac{\lambda}{3}}.$$

$\mathrm{Cov}(X,N)>0$, ce qui traduit le fait que les variables aléatoires X et N varient en moyenne dans le même sens : en effet plus l'on fait de lancers (N grand) plus l'on va obtenir de Piles en moyenne (X grand), et inversement.

Partie II

(1) On reconnait à nouveau un schéma binomial et $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$.

(2) *Dans cette question seulement on suppose que $n = 2$.*

(a) On a

$$\forall i \in \{0,1,2\}, \quad P(N = i) = \binom{2}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^i\left(\frac{1}{3}\right)^{2-i}.$$

On obtient

i	0	1	2
$P(N = i)$	1/9	4/9	4/9

(b) On a $X(\Omega) = N(\Omega) = \{0,1,2\}$.
On note P_i : "Obtenir *Pile* au i-ième lancer de la seconde série de lancers" et F_i : "Obtenir *Face* au i-ième lancer de la seconde série de lancers". Les lancers étant indépendants, on a

$$\begin{aligned}
P([N=0]\cap[X=0]) = P(N=0)P_{[N=0]}(X=0) &= \frac{1}{9}\times 1 = \frac{1}{9}\\
P([N=1]\cap[X=0]) = P(N=1)P_{[N=1]}(X=0) &= \frac{4}{9}\times P(F_1) = \frac{4}{9}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{27}\\
P([N=1]\cap[X=1]) = P(N=1)P_{[N=1]}(X=1) &= \frac{4}{9}\times P(P_1) = \frac{4}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27}\\
P([N=2]\cap[X=0]) = P(N=2)P_{[N=2]}(X=0) &= \frac{4}{9}\times P(F_1\cap F_2)\\
&= \frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{16}{81}\\
P([N=2]\cap[X=1]) = P(N=2)P_{[N=2]}(X=1) &= \frac{4}{9}\times P((F_1\cap P_2)\cup(P_1\cap F_2))\\
&= \frac{4}{9}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}\\
P([N=2]\cap[X=2]) = P(N=2)P_{[N=2]}(X=2) &= \frac{4}{9}\times P(P_1\cap P_2) = \frac{4}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{81}
\end{aligned}$$

Enfin on ne peut pas obtenir plus de Piles que l'on ne fait de lancers, donc :

$$P([N=0]\cap[X=1]) = P([N=0]\cap[X=2]) = P([N=1]\cap[X=2]) = 0.$$

On en déduit la loi conjointe de N et de X ainsi que la loi marginale de X

$X \setminus N$	0	1	2	Loi de X
0	1/9	8/27	16/81	49/81
1	0	4/27	16/81	28/81
2	0	0	4/81	4/81
Loi de N	1/9	4/9	4/9	1

(c) Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \frac{2}{3}\right)$ on a directement

$$E(N) = 2\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Puis

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} kP(X=k) = \frac{28}{81} + 2 \times \frac{4}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
E(NX) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=0}^{2} ikP([N=i]\cap[X=k]) \\
&= P([N=1]\cap[X=1]) + 2P([N=1]\cap[X=2]) + 2P([N=2]\cap[X=1]) + 4P([N=2]\cap[X=2]) \\
&= \frac{4}{27} + 0 + \frac{32}{81} + \frac{16}{81} \\
&= \frac{60}{81} \\
&= \frac{20}{27}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(N,X) = E(NX) - E(N)E(X) = \frac{20}{27} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\mathrm{Cov}(X,N) = \frac{4}{27}}.$$

Comme attendu, on a $\mathrm{Cov}(X,N) > 0$ (l'argumentation est la même qu'en I.5).

(3) Soit $i \in [\![0,n]\!]$.

Comme en I.1, sachant $[N=i]$, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(i, \frac{1}{3}\right)$.

(4) On suppose que $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$. D'un côté

$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \frac{i!}{k!\,(i-k)!}\,\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!}.$$

De l'autre côté

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(i-k)!\,((n-k)-(i-k))!} = \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!}.$$

On a donc bien

$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$

(5) On procède comme en I.2.

Le nombre N de lancers effectués lors de la seconde série de lancers est compris entre 0 et n (puisque $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$), le nombre de *Pile* obtenus lors de la seconde série de lancers est donc aussi compris entre 0 et n.

Donc

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!].$$

Fixons $k \in [\![0,n]\!]$.. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[N=i] : i \in [\![0,n]\!]\}$, on a

$$P(X=k) = \sum_{i=0}^{n} P_{[N=i]}(X=k)P(N=i).$$

Or si $i < k$, alors il est impossible d'obtenir k fois *Pile* lors de i lancers. Donc si $i < k$, alors $P_{[N=i]}(X = k) = 0$. Il ne reste donc que les indices $i \geq k$.

$$P(X = k) = \sum_{i=k}^{n} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$ et comme, sachant $[N = i]$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(i, \frac{1}{3}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i+k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2i-k} \\
&\underset{\text{II.4.}}{=} \binom{n}{k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i+k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2i-k} \\
&\underset{j=i-k}{=} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{2j+k} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{4}{9}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-j} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme. En simplifiant, il vient, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k}.$$

On en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{2}{9}\right)$.

(6) Ici il n'y a pas de 0 dans la loi conjointe de X et de Y, il faut donc un petit peu calculer pour trouver un contre-exemple. On a

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^{0} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-0} = \left(\frac{7}{9}\right)^{n} \quad \text{et} \quad P(Y = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{4}{9}\right)^{0} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-0} = \left(\frac{5}{9}\right)^{n}.$$

Par ailleurs on a simultanément $X = 0$ et $Y = 0$ si et seulement si $N = 0$ (si l'on effectue un lancer ou plus lors de la seconde série de lancers, alors on obtient au moins un *Pile* ou au moins 1 *Face*). Ainsi,

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = P(N = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

On a donc

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \left(\frac{27}{81}\right)^{n} \neq \left(\frac{35}{81}\right)^{n} = P(X = 0)P(Y = 0).$$

On en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

(7) On a toujours $X + Y = N$.

D'un côté, on a : $V(X+Y) = V(N)$, et de l'autre côté $V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\text{Cov}(X,Y)$. On a donc

$$V(N) = V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X,Y).$$

Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$, comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{9}\right)$ et comme $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{4}{9}\right)$, il vient :

$$n \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = n \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9} + n \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + 2\text{Cov}(X,Y)$$

Donc :

$$2\text{Cov}(X,Y) = \frac{2n}{9} - \frac{14n}{81} - \frac{20n}{81} = -\frac{16n}{81} \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\text{Cov}(X,Y) = -\frac{8n}{81}}.$$

$\text{Cov}(X,Y) < 0$, ce qui est attendu car X et Y varient en moyenne dans des sens opposés : plus l'on a obtenu de *Pile* lors de la seconde série de lancers, moins l'on a obtenu de *Face*.