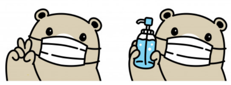
ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°1

À rendre le 14/09

Ce devoir est à faire ***par groupe de khôlle****. Bien que collectif, tout élément de la production rendue doit avoir été travaillé et compris par l'ensemble du groupe. Toutes les réponses doivent êtres* ***justifiées*** *et* ***soigneusement rédigées****.*

Exercice 1

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) À l'aide d'un pivot de Gauss, montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(2) Calculer P^2. Retrouver alors le résultat de la question précédente.

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x > 0$, calculer $f'(x)$.
(c) (*) À l'aide du développement limité de e^x en 0 (à l'ordre 2), montrer que f dérivable en 0 puis que f est finalement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

(2) (a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et que:
$$\forall x > 0, \qquad f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2).$$
(b) Étudier les variations de la fonction g définie, pour tout x de $[0; +\infty[$, par:
$$g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2.$$
En déduire que
$$\forall x > 0, \quad f''(x) > 0.$$
(c) Dresser alors le tableau de variation de f en incluant la limite en $+\infty$.
(d) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

(3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrer que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.

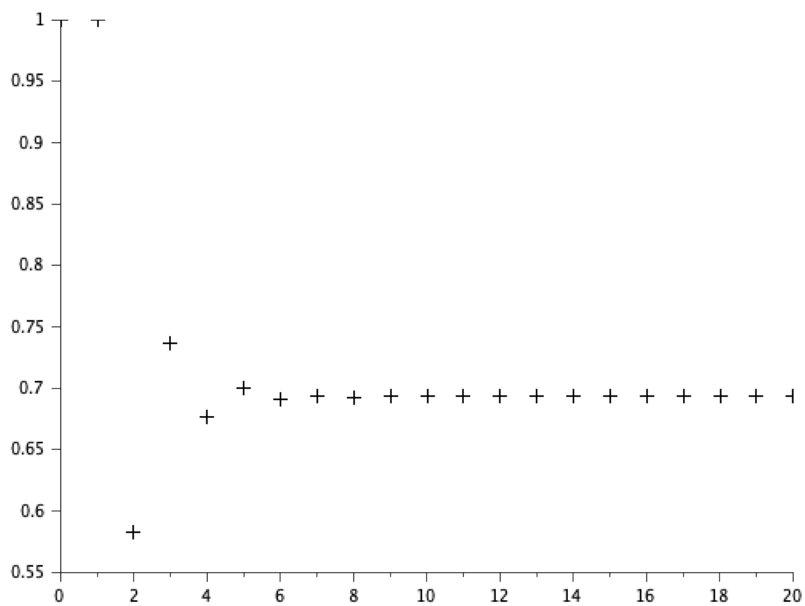
(b) (`SciLab`)

(i) Compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie la valeur de u_n.

```
function y=u(n)
    y=1
    for k=........
        .............
    end
endfunction
```

On ajoute les commandes suivantes, qui affichent la figure ci-contre. Que peut-on conjecturer quand à la monotonie de la suite ou bien quant à sa nature?

```
N=1:20
Y= feval(N,u)
plot2d(N, Y, -1)
```



(c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

(d) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x > 0$.

(e) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln 2|.$$

(f) Établir que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 3

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On appelle "tirage" la séquence suivant:

On pioche, au hasard, une boule de l'urne, puis :

- Si la boule piochée est bleue, on la remet dans l'urne.
- Si la boule piochée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

Pour tout entier naturel n non nul, on note Y_n la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules rouges présentes dans l'urne à l'issue du $n-$ième tirage.
Pour tout entier $k \geq 1$, on introduit R_k resp. B_k) l'évènement "La $k-$ième boule piochée dans l'urne est rouge (resp. bleue)".

(1) (`SciLab`) Compléter la fonction ci-dessous afin qu'elle simule une réalisation de Y_n.

```
function r=Y(n)
    r=2
    for k=......................
        if r<> 0 then
            if  ................ then
                 .................
            end
        else
            r=0
        end
    end
endfunction
```

(2) Donner la loi de probabilité de Y_1. Préciser son espérance et sa variance.

(3) Quelles sont les valeurs possibles de Y_n dans le cas où n est supérieur ou égal à 2?

(4) Calculer, pour tout entier $n \geq 1$, $P(Y_n = 2)$.

(5) On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = P(Y_n = 1)$.
  (a) Rappeler la valeur de u_1 et montrer que $u_2 = \dfrac{2}{3}$.
  (b) En utilisant un système complet d'événements lié à la variable Y_n, montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}.$$
  Cette relation reste-t-elle valable lorsque $n = 1$?
  (c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.

  Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire v_n en fonction de n et de v_1, puis conclure que, pour tout $n \geq 1$,
$$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}.$$
  (d) Déduire des résultats précédents $P(Y_n = 0)$ pour tout entier naturel non nul n.
  (e) (*) Justifier que $(Y_n = 0) \subset (Y_{n+1} = 0)$. En déduire que
$$P\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty}(Y_n = 0)\right) = 1.$$
  Interpréter.

(6) Calculer l'espérance de Y_n.

(7) On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.

  (a) Donner $Z(\Omega)$.
  (b) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function res=Z( )` qui renvoie une simulation de Z.
  (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Exprimer l'événement $(Z = k)$ en fonction des variables Y_k et Y_{k-1}.
  (d) En déduire la loi de Z.