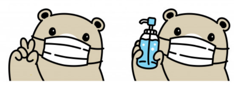


Devoir Maison n°1

Solution

Exercice 1

(1) Procédons donc par pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_3 - L_1}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_2 - L_4}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_3}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 2L_1 - L_4 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 - L_4 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_4}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

On a pu faire le pivot jusqu'à l'obtention d'une matrice diagonale (à gauche). Ainsi P et inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}P.$$

(2) On constate que $P^2 = P \cdot P = 4\mathrm{Id}$, ce qui permet(tait) de retrouver (sans pivot!) que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{4}P$.

Exercice 2

Cet exercice provient, avec un peu d'amélioration, d'un sujet de ***EML 2001****. Si le sujet est ancien, cette même fonction est apparu depuis à plusieurs reprises.*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(1) (a) En dehors du *point de raccordement*, c'est à dire sur $]0; +\infty[$, f est bien continue comme quotient de combinaisons de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
En 0, par limite usuelle

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0),$$

f est également continue en 0 et donc partout sur $[0; +\infty[$.

(b) En fait, pour la même raison qu'à la question précédente, f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ comme quotient de telles fonctions (dont le dénominateur ne s'annule pas). Les formules de dérivation donnent, pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}.$$

(c) La dérivabilité au point de raccordement se montrer avec l'existence de la limite du taux d'accroissement en ce point. On rappelle qu'au voisinage de 0, on peut écrire

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Ceci permet d'obtenir

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \frac{x - 1 - x - x^2/2 + o(x^2) + 1}{x(1 + x + o(x) - 1)} \\ &= \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{-1/2 + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\xrightarrow[x \to 0]{} -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien dérivable en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.

Il reste donc à montrer que f' est continue en 0. Ce qu'on fait également à l'aide du DL précédent. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} \\
&= \frac{(1-x)(1+x+x^2/2+o(x^2)) - 1}{(1+x+o(x)-1)^2} \\
&= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\
&= \frac{-1/2+o(1)}{1+o(1)} \\
&\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} = f'(0)
\end{aligned}$$

et f' est bien continue en 0 donc f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

(2) (a) Mêmes arguments de régularité que précédemment. En dehors de 0, f est $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$). Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{-xe^x(e^x-1)^2 - [(1-x)e^x - 1]2(e^x-1)e^x}{(e^x-1)^4} \\
&= \frac{-xe^x(e^x-1) - 2e^x(e^x - xe^x - 1)}{(e^x-1)^3} \\
&= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(b) La fonction g introduite est combinaison de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;+\infty[$. On dérive sans vergogne. Pour $x \geq 0$, on a

$$g'(x) = (1+x)e^x - e^x + 1 = (x-1)e^x + 1.$$

On doit encore dériver car on n'a pas directement accès au signe de cette quantité....

$$g''(x) = xe^x \geq 0 \qquad (x \geq 0).$$

Ainsi, on peut dresser les tableaux de variations successifs de g' et de g pour obtenir le signe de $g(x)$. En particulier, le tableau ci-dessous permet d'obtenir que g est croissante sur $\mathbb{R}+$ mais surtout (ce qui est utile pour la question d'après et l'étude de f) que $g(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}+$.

x	0		$+\infty$
$g''(x)$		$+$	
g'	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	

(c) Comme, toujours pour $x \geq 0$,

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} g(x) \geq 0$$

On en conclut que f' est croissante. Observant que, au voisinage de ∞,

$$f'(x) = \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2} \sim \frac{-xe^x}{(e^x)^2} = \frac{-x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissance comparée, on peut dresser les tableaux de variations suivants :

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	$\Vert$	$+$	
f'	$-1/2$	$\nearrow$	0
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

On observera qu'on a mis une double barre sous le 0 pour $f''(x)$ car on n'a pas montré la dérivabilité en 0. On le laisse en exercice (il faut utiliser un DL d'ordre supérieur...).
La limite de $f(x)$ en $+\infty$ s'obtient comme celle de $f(x)$:

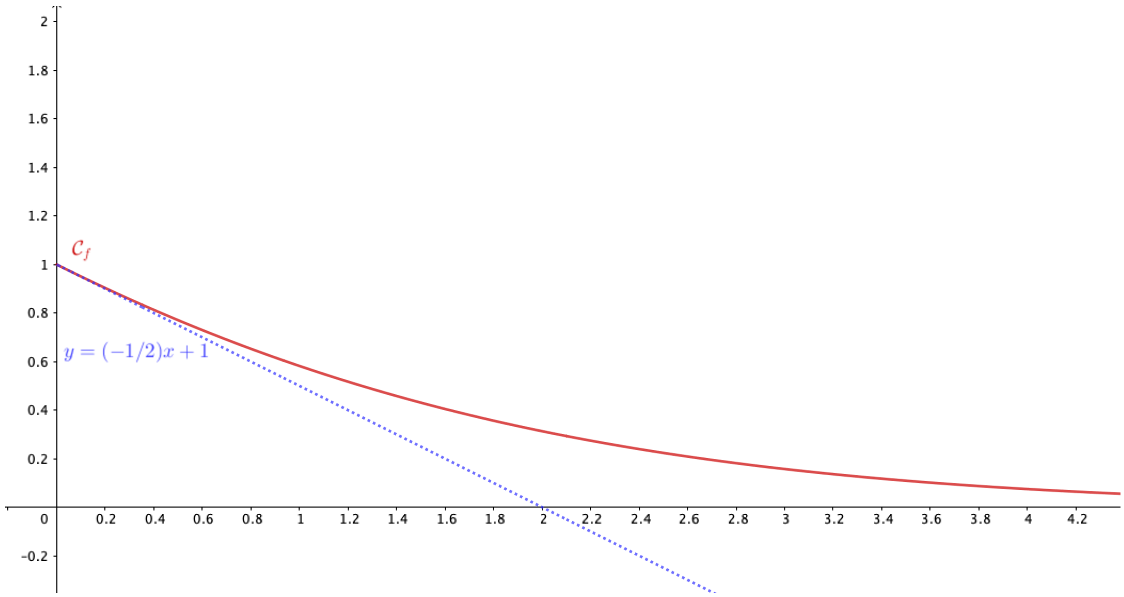
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \sim \frac{x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissance comparée.

(d) On fait apparaître tous les éléments de l'étude sur le dessin. Notamment

- l'asymptote horizontale qui témoigne de la limite nulle en $+\infty$;

- la tangente en 0 (d'équation $y = f'(0)x + f(0) = -(1/2)x + 1$ qui témoigne de la dérivabilité en 0;
- la convexité qu'on a implicitement obtenue avec la dérivée seconde positive.



(3) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) On procède bien sûr par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, $u_0 = 0$ est bien défini et appartient bien à $[0; 1]$.

- hérédité. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et soit élément de $[0; 1]$. Comme f est bien définie sur $[0; 1]$, on peut calculer $u_{n+1} = f(u_n)$ qui existe. Comme, d'après le tableau de variations de f obtenu ci-avant, f envoie tout réel positif dans $]0; 1]$, c'est aussi le cas pour u_n et donc $u_{n+1} = f(u_n) \in]0; 1] \subset [0; 1]$. La récurrence est terminée.

(b) (`SciLab`)

(i) C'est un programme classique de calcul de terme au rang n avec une boucle `for` avec une petite subtilité. Comme `SciLab` ne pourra pas faire le calcul `u/(exp(u)-1)` si $u = 0$, on initialise avec u_1 et donc la boucle commence à $k = 2$.

```
function y=u(n)
    y=1 //on initialise avec u_1=f(0)=1
    for k=2:n
        u=u/(exp(u)-1)
    end
endfunction
```

On a représenté graphiquement les termes u_1, u_2, ..., u_{20}. La suite semble converger vers une limite $\ell \simeq 0.7$ en revanche elle n'est pas monotone.

(c) D'après les tableaux de variations des fonctions f et f' sur $[0; +\infty[$ obtenus précédemment, on a bien, pour tout $x \geq 0$,

$$-\frac{1}{2} \leq f'(x) \leq 0 \leq \frac{1}{2}$$

ce qui donne bien

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

et

$$0 \leq f(x) \leq 1.$$

(d) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\iff \frac{1}{e^x - 1} = 1 \qquad \text{(car } x > 0\text{)} \\ &\iff e^x - 1 = 1 \iff e^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2). \end{aligned}$$

(e) Cette question est ultra-classique. C'est une utilisation de l'inégalité des accroissements finis qui permet de l'obtenir. En effet,
- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$[1];
- tous les termes de la suite sont dans ce même intervalle, ainsi que $\ln(2)$.
- $|f'(x)| leq 1/2$ pour tout $x \geq 0$ (et *a fortiori* pour tout $x \in [0;1]$)

On peut donc appliquer l'IAF qui donne

$$|f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|.$$

Mais (et c'est ce qui fait que ça marche), comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\ln(2)) = \ln(2)$, on peut alors écrire

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|,$$

ce qu'on voulait.

(f) La relation (sur l'écart entre u_{n+1} et $\ln(2)$ en fonction de l'écart entre le terme précédent et $\ln(2)$) permet d'obtenir le caractère héréditaire de la récurrence visant à montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En effet,

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a

$$|u_0 - \ln(2)| = \ln(2) \leq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad (HR)$$

Alors,

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - \ln(2)| &\leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \qquad \text{(d'après la question précédente)} \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{(par HR)} \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui termine la récurrence.

[1]Et on est bien content d'avoir cette propriété en 0!

Cet encadrement se réécrit

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n - \ln(2) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ou encore

$$\ln(2) - \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq u_n \leq \ln(2) + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et par théorème des gendarmes, on a bien que (u_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2).$$

Exercice 3

*Cet exercice est inspiré d'un exercice du sujet **ESC 2005**.*

Une urne contient initialement deux boules rouges et une boule bleue indiscernables au toucher. On appelle "tirage" la séquence suivant:

On pioche, au hasard, une boule de l'urne, puis :

- Si la boule piochée est bleue, on la remet dans l'urne.
- Si la boule piochée est rouge, on ne la remet pas dans l'urne mais on remet une boule bleue dans l'urne à sa place.

(1) On effectue n tirages, donc la variable qui compte les *tours de boucle* varie de 1 à n (c'est à dire `k=1:n`). Par contre, on ne pioche réellement que si il reste les deux couleurs présentes dans l'urne, sinon, le nombre de boules rouges reste à 0. La probabilité de piocher une boule rouge est égale au nombre de boules rouges dans l'urne au moment de la pioche (valeur stockée dans la variable `r`) par le nombre total de boules qui est constant égal à 3. Ceci donne le programme suivant

```
function r=Y(n)
    r=2
    for k=1:n
        if r<> 0 then
            if  rand( ) < r/3 then
                r=r-1
            end
        else
            r=0
        end
    end
endfunction
```

(2) Y_1 est la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges après un tirage. Ou bien on pioche une bleue (avec probabilité 1/3) au premier coup et la disposition de l'urne est inchangée (2 rouges et 1 bleue), ou bien on pioche une rouge (avec proba 2/3) que l'on remplace ce qui mène à 2 boules bleues et une boule rouge. On a donc $Y_1(\Omega) = \{1, 2\}$ et

$$P(Y_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{3}, \qquad P(Y_1 = 1) = P(R_1) = \frac{2}{3}.$$

Le calcule de l'espérance se fait sans difficulté

$$E(Y_1) \;=\; 1 \times P(Y_1 = 1) + 2 \times P(Y_1 = 2) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

Pour la variance, on passe par la formule de König-Huyguens en commençant par calculer $E(Y_1^2)$

$$E(Y_1^2) = 1^2 \times P(Y_1 = 1) + 2^2 \times P(Y_1 = 2) = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

Puis,

$$V(Y_1) = E(Y_1^2) - E(Y_1)^2 = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

☞ Cette première question de l'exercice est facile et il est nécessaire qu'elle soit comprise et réussie par tou.te.s.

(3) On ne rajoute jamais de boule rouge, donc on en aura au maximum 2. Et tant qu'il y a des boules rouges, on peut en enlever jusqu'à ce qu'il n'y en ait plus. On a donc

$$Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}.$$

À noter que la valeur 0 ne peut être obtenue qu'après avoir pioché deux fois une boule rouge donc au minimum après 2 tirages donc pour au moins $n = 2$.

(4) Soit $n \geq 1$. Si on a $Y_n = 2$, cela signifie qu'on ne pioche que des boules bleue à chaque fois. Si on tire une bleue, l'urne garde la même composition et la probabilité de tirer à nouveau une bleue est inchangée. Ainsi, par la formule des probabilités composées

$$P(Y_n = 2) = P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) \times ... \times P_{\bigcap_{j=1}^{n-1} B_j}(B_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(5) On pose, pour tout $n \geq 1$, $u_n = P(Y_n = 1)$.

(a) On a déjà calculé $u_1 = P(Y_1 = 1) = 2/3$. Pour u_2, cela *dépend* de ce qu'on a tiré à la première pioche, et on utilise la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{R_1, B_1\}$.

$$\begin{aligned} u_2 &= P(Y_2 = 1) = P_{R_1}(Y_2 = 1)P(R_1) + P_{B_1}(Y_2 = 1)P(B_1) \\ &= P_{R_1}(B_2)P(R_1) + P_{B_1}(R_2)P(B_1) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geq 2$. On ne peut pas passer de 0 boules rouges au moment n à 1 boule rouge au moment $n+1$. Ainsi, en appliquant la FPT au s.c.e $\{(Y_n = 0), (Y_n = 1), (Y_n = 2)\}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(Y_{n+1} = 1) \\ &= P_{Y_n=0}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 0) + P_{Y_n=1}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 1) + P_{Y_n=2}(Y_{n+1} = 1)P(Y_n = 2) \\ &= 0 + P_{Y_n=1}(B_{n+1})P(Y_n = 1) + P_{Y_n=2}(R_{n+1})P(Y_n = 2) \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{2}{3}u_n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

Pour $n = 1$, on avait trouvé $P(Y_2 = 1) = 2/3$, ce qui est bien compatible avec la formule pour $n \geq 2$. La formule est donc valide pour tout $n \geq 1$ et c'est tant mieux car on s'en sert juste après.

(c) On pose pour tout entier naturel n non nul $v_n = u_n + \dfrac{2}{3^n}$.

On exprime v_{n+1} en fonction de v_n.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}u_n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + \frac{2}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2}{3}\left(u_n + \frac{2}{3^n}\right) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

et (v_n) est bien géométrique de raison $2/3$.
On en déduit l'expression de son terme général

$$v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(u_1 + \frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

On revient ensuite à u_n.

$$u_n = v_n - \frac{2}{3^n} = 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}\right).$$

(d) Par complémentarité, pour tout $n \geq 1$,

$$P(Y_n = 0) = 1 - P(Y_n = 1) - P(Y_n = 2) = 1 - 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3^n}\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 1 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(e) (*) Si il n'y a plus de boule rouge après n tirages, on va seulement tirer des bleues et ne plus changer la composition de l'urne donc il n'y aura pas non plus de boule rouge après $(n+1)$ tirages.
Ceci s'interprète comme le fait que la suite (Y_n) est croissante au sens de l'inclusion. Ainsi, le **théorème de la limite monotone** nous permet d'affirmer

$$P\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty}(Y_n = 0)\right) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n = 0) = 1.$$

L'évènement $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{+\infty}(Y_n = 0)$ signifie qu'à un moment, il n'y aura plus de boule rouge. Ainsi, presque sûrement, on va vider l'urne de ses boules rouges.

(6) C'est un calcul qui ne présente pas de difficulté.

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= 0 \times P(Y_n = 0) + 1 \times P(Y_n = 1) + 2 \times P(Y_n = 2) \\ &= 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{3^n}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= 2\left(\frac{2}{3}\right)^n. \end{aligned}$$

(7) On note Z la variable aléatoire égale au numéro de l'épreuve amenant la dernière boule rouge.

(a) Dans le "meilleur" des cas, la dernière boule rouge est piochée au deuxième coup. Ensuite, on peut avoir une *suite* arbitrairement longue de pioches de boules bleues avant de piocher des boules rouges. Donc $Z(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} = [\![2; +\infty[\![$.

(b) On peut s'inspirer du premier programme, sauf que maintenant on continue à piocher **tant qu'** il reste des boules rouges, et il faut aussi introduire une variable qui compte le nombre de pioches. Ceci donne

```
function res=Z( )
    res=1
    r=2
    while r<>0 //tant qu'il reste des rouges
        res=res+1 //il faut continuer à piocher
        if rand( ) < r/3 then //si on pioche une rouge
            r=r-1 //on la remplace par une bleue
        end
    end
endfunction
```

(c) Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Si $(Z=k)$, alors après le $(k-1)-$ième tirage, il y avait encore une boule rouge qu'on a pioché à la $k-$ième pioche. On peut alors écrire

$$P(Z=k)=P\left((Y_{k-1}=1)\cap(Y_k=0)\right).$$

(d) On en déduit

$$\begin{aligned}P(Z=k) &= P\left((Y_{k-1}=1)\cap(Y_k=0)\right)=P_{(Y_{k-1}=1)}\left(Y_k=0\right)P(Y_{k-1}=1)\\ &= P_{(Y_{k-1}=1)}\left(R_k\right)P(Y_{k-1}=1)\\ &= \frac{1}{3}\times 2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}-\frac{1}{3^{k-1}}\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{k}-\frac{2}{3^k}.\end{aligned}$$