ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

 

Devoir Maison n°2

À rendre le 05/10

*Ce devoir est à faire **par groupe de khôlle**. Bien que collectif, tout élément de la production rendue doit avoir été travaillé et compris par l'ensemble du groupe. Toutes les réponses doivent êtres **justifiées** et **soigneusement rédigées**.*

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes

(1) Montrer que les ensembles suivant sont des espaces vectoriels.Déterminer leurs dimensions.

$$(i)\ \left\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) :\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = 2X\right\},$$

$$(ii)\ \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) :\ {}^tM = -M\right\}, \qquad (iii)\ \{P \in \mathbb{R}_3[X] :\ (X-1)P' = 2P\}$$

(2) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (-1, 2, 0), \quad v = (3, -5, -1), \quad w = (0, 1, -2).$$

Expliciter les coordonnées d'un vecteur (x, y, z) dans cette nouvelle base.

Exercice 2

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité p. On note $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFPP\ldots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.
Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

(1) Recopier et compléter la fonction suivante (**en expliquant les ajouts**), prenant en argument la probabilité p d'obtenir pile et permettant de simuler la variable aléatoire X_1.

```
function X=longueur(p)
    X=1;
    told=grand(1,1,'bin', ....., .....)
    tnew=grand(1,1,'bin', ....., .....)
    while .............
        X=.................
        told=...............
        tnew=..............
    end
endfunction
```

(2) Écrire une fonction d'entête `function U=SampleX1(N,p)` permettant d'obtenir un $N-$échantillon de X_1, c'est à dire un vecteur ligne U de taille N dont chaque composante est une réalisation de la variable X_1.

(3) Écrire un script permettant de comparer graphiquement les fréquences des valeurs obtenues sur un échantillon de taille 1000 de X_1 et les valeurs théoriques de la loi géométrique de paramètre $1/2$. Commenter (*on joindra une capture d'écran de la figure obtenue*).

(4) Déterminer la loi de X_1. Montrer qu'elle admet une espérance que l'on explicitera.

(5) Écrire une fonction d'entête `function res=X2(p)` permettant de simuler la variable X_2.

Exercice 3*

On considère l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que l'on admet être un espace vectoriel et on introduite

$$F = \{u \in E : \; u'' - 5u' = 0\}.$$

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
(2) Soit $u \in F$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = u'(x)e^{-5x}$ est constante.
(3) En déduire que $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et $u_2(x) = e^{5x}$.
(4) Quelle est la dimension de F?

Exercice 4

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation (E_n) : $g(x) = n$, d'inconnue le réel x.

(1) Montrer que l'équation (E_n) admet exactement deux solutions, l'une strictement négative notée α_n et l'autre strictement positive notée β_n.

(2) **Limite de** β_n.

 (a) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement croissante.
 (b) Montrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $[1; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de g^{-1}.
 (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = +\infty$.

(3) **Équivalent de** β_n.

 (a) Montrer que: $1 \leqslant g(\ln n) \leqslant n$.
 (b) En déduire que: $g(\ln(2n)) \geqslant n$. (*On donne :* $\ln 2 \simeq 0,69$.)
 (c) En déduire que $\ln(n) \leqslant \beta_n \leqslant \ln(2n)$, puis en déduire un équivalent de β_n.