ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`


# Devoir Maison n°2

*Solution*

## Exercice 1

*Les questions de cet exercice sont indépendantes*

(1) Pour alléger la rédaction de la solution, on va noter les trois ensembles de cette question respectivement $E, F$ et $G$.

(i) On commence par résoudre l'équation

$$\begin{aligned}
X \in E \iff & \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = 2X \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ -z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \\ -z & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
\iff & X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On peut donc conclure que

$$E = \text{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Étant égal au sous-espace vectoriel engendré par un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, $E$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.
Le vecteur qui forme la famille génératrice est non nul et forme bien une base de $E$ qui est alors de dimension 1.

(ii) Remarquant que si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors ${}^tM = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
M \in F &\iff {}^tM = -M \\
&\iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -a \\ d &=& -b \\ g &=& -c \\ e &=& -e \\ h &=& -f \\ i &=& -i \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ d &=& -b \\ g &=& -c \\ e &=& 0 \\ h &=& -f \\ i &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff M = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, $F$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est donc un espace vectoriel. La famille génératrice qui l'engendre est libre (en notant les trois matrices $J, K, L$ on a immédiatement $\alpha J + \beta K + \gamma L = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0$) et forme donc une base de $F$ qui est alors de dimension 3.

(iii) On commence par écrire $P = a + bX + cX^2 + dX^3$ et par conséquent $P' = b + 2cX + 3dX^2$. Il suit que

$$\begin{aligned}
P \in G &\iff (X-1)P' = 2P \\
&\iff (X-1)(b + 2cX + 3dX^2) = 2(a + bX + cX^2 + dX^3) \\
&\iff bX + 2cX^2 + 3dX^3 - b - 2cX - 3dX^2 = 2a + 2bX + 2cX^2 + 2dX^3 \\
&\iff -b + (b-2c)X + (2c-3d)X^2 + 3dX^3 = 2a + 2bX + 2cX^2 + 2dX^3 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -b &=& 2a \\ b-2c &=& 2b \\ 2c-3d &=& 2c \\ 3d &=& 2d \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& -(1/2)b \\ c &=& -(1/2)b \\ d &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff P = -\frac{1}{2}b + bX - \frac{1}{2}X^2 = b\left(-\frac{1}{2} + X - \frac{1}{2}X^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$G = \text{Vect}\left(-\frac{1}{2} + X - \frac{1}{2}X^2\right) = \text{Vect}\left(-1 + 2X - X^2\right) = \text{Vect}((X-1)^2)$$

et $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ donc un espace vectoriel. Il est engendré par un seul vecteur non nul qui, à lui seul, en forme une base et donc $G$ est de dimension 1.

(2) On se place dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 et, comme la famille considérée est formée de 3 vecteurs, il suffit de montrer qu'elle est libre, ou bien qu'elle est génératrice pour qu'elle forme une base de l'espace. Comme ici on demande ensuite les coordonnées d'un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$ dans la nouvelle base, il est plus judicieux, pour une fois, de montrer que la famille est

génératrice. La solution trouvée nous donnera les coordonnées! Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on montre donc qu'il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$X = \alpha u + \beta v + \gamma w.$$

Les solutions trouvées pour $\alpha, \beta, \gamma$ (qui dépendront donc de $x, y$ et $z$) seront alors les coordonnées de $X$ dans la base $(u, v, w)$.

$$\begin{aligned}
X = \alpha u + \beta v + \gamma w \quad &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta &=& x \\ 2\alpha - 5\beta + \gamma &=& y \\ -\beta - 2\gamma &=& z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha + 3\beta &=& x \\ \beta + \gamma &=& 2x + y \\ -\beta - 2\gamma &=& z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -\alpha - 3\gamma &=& -5x - 3y \\ \beta + \gamma &=& 2x + y \\ -\gamma &=& 2x + y + z \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{lcl} \alpha &=& 11x + 6y + 3z \\ \beta &=& 4x + 2y + z \\ \gamma &=& -2x - y - z \end{array}\right.
\end{aligned}$$

La famille $(u, v, w)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$ et le vecteur $X = (x, y, z)$ a pour coordonnées dans cette nouvelle base

$$(11x + 6y + 3z,\ 4x + 2y + z,\ -2x - y - z).$$

# Exercice 2

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité $p$. On note $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les $n$ premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Soient $X_1$ et $X_2$ les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

(1) Pour *mesurer* la longueur d'une série, il faut être capable de savoir si, à chaque nouveau lancer, ce lancer est le même ou non que le précédent. On a donc besoin de deux variables, ici nommées `told` et `tnew` qui vont contenir les valeurs successives des lancers. On affecte la valeur 1 si le lancer donne *Pile* et 0 si c'est *Face* (ce choix est arbitraire, on aurait pu faire l'autre, mais cela change les paramètres dans le programme). Le résultat du $k$−ième lancer est alors la réalisation d'un loi de Bernoulli de paramètre $p$ que l'on simule par l'appel de `grand(1,1,'bin', 1, p)`. On a tout ce qu'il faut pour proposer le programme suivant dont la compréhension nous parait alors claire.

```
function X=longueur(p)
    X=1;
    told=grand(1,1,'bin', 1, p)
    tnew=grand(1,1,'bin', 1, p)
    while told == tnew // tant qu'il s'agit de la même série
        X=X+1
        told=tnew
        tnew=grand(1,1, 'bin', 1, p) // on relance
    end
endfunction
```

(2) Ceci ne pose aucun problème.

```
function U=SampleX1(N,p)
    U=zeros(1, N) // on initialise : liste "vierge" de bonne longueur
    for k=1:N
        U(k)=longueur(p) // chaque composante remplacée par simulation de X_1
    end
endfunction
```

(3) On génère donc un échantillon de taille 1000 de $X_1$ avec la fonction de la question précédente. Il faut ensuite classer les résultats avec la commande `tabul( )` puis représenter le diagramme à bâtons des **fréquences** avec la commande `bar( )`.
Pour les mettre en parallèle avec les hauteurs des valeurs théoriques de la loi géométrique, il faut aussi écrire une fonction[1] qui renvoie, pour un argument $k$, la valeur théorique $(1/2)^{k-1} * (1/2) = (1/2)^k$.

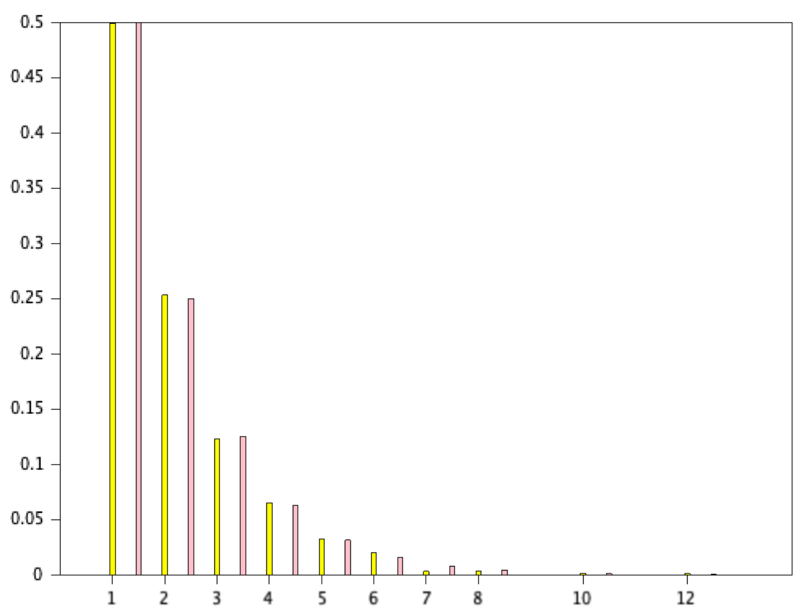
```
function y=geom_th(k)
    y=(1/2)^k
endfunction

U=SampleX1(1000, 1/2)
T=tabul(U, 'i')
th=feval(T(:, 1), geom_th)

bar(T(:, 1)+.5, th, width=0.1, 'pink')
bar(T(:, 1), T(:, 2)/1000, width=0.1, yellow')
```

Comme on peut le voir sur la capture ci-contre, les hauteurs de bâtons semblent être les mêmes, ce qui permet de conjecturer que, dans le cas où $p = 1/2$, $X_1$ semble suivre une loi géométrique de paramètre 1/2

<u>conjecture:</u> $X_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(1/2)$.




[1]Ce n'est pas vraiment nécessaire, on laisse le lecteur réfléchir à l'unique instruction qu'on aurait pu écrire

(4) La première série a une longueur d'au moins 1 et peut être arbitrairement longue donc $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Notant $P_j$ (resp. $F_j$) l'évènement "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k-$ième lancer", on a

$$\begin{aligned}
P(X_1 = k) &= P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{k} P_j \cap F_{k+1}\right] \cup \left[\bigcap_{j=1}^{k} F_j \cap P_{k+1}\right]\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{k} P_j \cap F_{k+1}\right) + P\left(\bigcap_{j=1}^{k} F_j \cap P_{k+1}\right) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \left(\prod_{j=1}^{k} P(P_j)\right) P(F_{k+1}) + \left(\prod_{j=1}^{k} P(F_j)\right) P(P_{k+1}) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= p^k q + q^k p.
\end{aligned}$$

On constate que pour $p = q = 1/2$, on a

$$P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{k},$$

ce qui est bien la formule de la loi géométrique de paramètre $1/2$ et valide la conjecture émise précédemment.
L'existence de l'espérance est conditionnée par la convergence d'une certaine série.
Plus précisément,

$$\begin{aligned}
X_1 \text{ admet une espérance} \quad &\iff \quad \sum_{k \geq 1} kP(X_1 = k) \text{ converge (absolument)} \\
&= \quad \sum_{k \geq 1} k\left(p^k q + q^k p\right) \text{ converge}
\end{aligned}$$

Or,

$$kP(X_1 = k) = qp \times kp^{k-1} + pq \times kq^{k-1}$$

et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques (dérivées) de raisons $p$ et $q$ (avec $p, q \in ]0; 1[$) donc convergentes.
Ainsi $X_1$ admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(p^k q + q^k p\right) \\
&= qp \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + pq \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\
&= qp \times \frac{1}{(1-p)^2} + pq \times \frac{1}{(1-q)^2} \\
&= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.
\end{aligned}$$

(5) On reprend la fonction pour la première série qu'on complète avec poursuite des lancers pour obtenir la deuxième série. Cela donne le programme ci-après.
On rajoute aussi, même si ce n'est pas demandé dans l'exercice, le calcul de la loi de $X_2$ à titre informatif, en prenant un peu d'avance sur le chapitre sur les coupes de v.a.
Comme précédemment la longueur de la seconde série prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Avec la formule

des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = k)\ k \in \mathbb{N}^*\}$, on a, pour $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k \cap X_2 = j) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} P\left(\left[\bigcap_{i=1}^{k} P_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{k+j} F_i \cap P_{k+j+1}\right] \cup \left[\bigcap_{i=1}^{k} F_i \cap \bigcap_{i=k+1}^{k+j} P_i \cap F_{k+j+1}\right]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(p^k q^j p + q^k p^j q\right) \\
&= p^2 q^j \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} + q^2 p^j \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\
&= p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}.
\end{aligned}$$

On constate notamment que $X_1$ et $X_2$ ne suivent pas la même loi (sauf si $p = q = 1/2$).

```
function res=X2(p)
    X_1=1 //la première série commence
    told=grand(1,1,'bin', 1, p)
    tnew=grand(1,1,'bin', 1, p)
    while told == tnew // tant qu'il s'agit de la même série
        X_1=X_1+1
        told=tnew
        tnew=grand(1,1, 'bin', 1, p) // on relance
    end
    res=1 //la seconde série commence
    told=tnew
    tnew=grand(1,1,'bin', 1, p) //un nouveau lancer
    while told==tnew //tant que c'est la même série
        res=res+1
        told=tnew
        tnew=grand(1,1,'bin', 1, p)
    end
endfunction
```

# Exercice 3*

Ce petit bout d'exercice provient du sujet **EDHEC 2009**.

On considère l'ensemble $E$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que l'on admet être un espace vectoriel et on introduite

$$F = \{u \in E :\ u'' - 5u' = 0\}.$$

(1) On montre que $F$ est un espace vectoriel en montrant que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. En effet,

- $F$ est non vide: la fonction nulle (dont les dérivées successives sont nulles) vérifie clairement la condition d'appartenance à $F$.

- $F$ est stable par combinaison linéaire: Soient $u$ et $v$ deux fonctions de $F$ et $\lambda, \mu$ deux réels. Par linéarité de l'opération de dérivation, on a

$$\begin{aligned}(\lambda u+\mu v)''-5\,(\lambda u+\mu v)' &= \lambda u''+\mu v''-5\lambda u'-5\mu v'\\ &= \lambda\,(u''-5u')+\mu(v''-5v')\\ &= 0\end{aligned}$$

  et $\lambda u+\mu v \in F$.

(2) Soit $u \in F$. La fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (comme $u \in F \subset \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $u'$ est bien dérivable). On a

$$g'(x) = u''(x)e^{-5x} - 5u'(x)e^{-5x} = e^{-5x}\,(u''(x) - 5u'(x)) = 0.$$

La fonction $g$ a une dérivée constante égale à 0, elle est donc elle-même constante; il existe donc un réel $a \in \mathbb{R}$ (qui dépend de $u$) tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^{-5x}u'(x) = a.$$

(3) Soit $u \in F$. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$u'(x) = ae^{5x}.$$

Remarquant que $u$ est une primitive de $u'$ est que toutes les primitives de $x \mapsto ae^{5x}$ sont de la forme $(a/5)e^{5x} + b$ où $b$ est une constante réelle, on en conclut qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad u(x) = \frac{a}{5}e^{5x} + b,$$

ce qui se réécrit comme

$$u = bu_1 + \frac{a}{5}u_2$$

et donc $u$ est bien combinaison linéaire de $u_1$ et $u_2$. Donc

$$F \subset \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, il suffit de vérifier que $u_1$ et $u_2$ sont bien dans $F$, ceci implique que le sous-espace qu'elles engendrent le sera aussi par stabilité de $F$ par combinaison linéaire ($F$ est un e-v). Ceci se vérifie sans difficulté. Pour $u_1$, c'est une constante dont les deux dérivées successives sont nulles donc c'est trivial. Pour $u_2$,

$$u_2''(x) - 4u_2'(x) = 25e^{5x} - 5 \times 5e^{5x} = 0.$$

On a bien montré que

$$F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2).$$

(4) La famille $(u_1, u_2)$ est alors génératrice de $F$. Il reste à vérifier qu'elle est libre. S'il existait $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u_2 = \lambda u_1$, mais comme $u_1$ est constante et que $u_2$ ne l'est pas, ce n'est bien sûr pas possible. Ainsi, la famille est libre et forme une base de $F$. On peut conclure que

$$\dim(F) = 2.$$

# Exercice 4

On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation $(E_n)\,:\; g(x) = n$, d'inconnue le réel $x$.

(1) C'est une question classique que l'ont résout à l'aide du *théorème de bijection*. Commençons par étudier la fonction $g$ et dresser son tableau de variations. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - 1$, quantité dont on obtient le signe immédiatement

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha_n$ | $0$ | $\beta_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $n$ | $1$ | $n$ | $+\infty$ |

Sur chaque intervalle $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$, $g$ est strictement monotone et continue, elle réalise alors une bijection de $]-\infty;0[$ sur $]1;+\infty[$ et une autre de $]0;+\infty[$ sur $]1;+\infty[$. Ainsi, tout $n\in\mathbb{N}$, avec $n\geq 2$ admet exactement deux antécédents par $g$: un dans $]-\infty;0[$ (noté $\alpha_n$) et un dans $]0;+\infty[$ (noté $\beta_n$).

(2) **Limite de** $\beta_n$.

(a) Comme $g(\beta_n)=n\leq n+1=g(\beta_{n+1})$ et que $g$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, il suit que $\beta_n\leq\beta_{n+1}$, ou encore que $(\beta_n)$ est croissante.

(b) On a déjà dit, grâce au théorème de bijection, que $g$ en réalisait une de $\mathbb{R}_+$ sur $[1;+\infty[$. Ce théorème nous donne également les variations de la bijection réciproque $g^{-1}$:

| $x$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $g^{-1}$ | $0$ | $+\infty$ |

(c) En remarquant que $g(\beta_n)=n\Leftrightarrow\beta_n=g^{-1}(n)$, la limite en $+\infty$ de $g^{-1}$ apparaissant ci-dessus nous donne

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\lim_{n\to+\infty}g^{-1}(n)=+\infty.$$

(3) **Équivalent de** $\beta_n$.

(a) Sachant que le minimum de $g$ sur $\mathbb{R}_+$ vaut 1 et que $\ln(n)\geq 0$ pour $n\geq 2$, on a déjà $g(\ln(n))\geq 1$. De plus, comme $\ln(n)\geq 0$, on a aussi

$$g(\ln(n))=e^{\ln(n)}-\ln(n)=n-\ln(n)\leq n.$$

(b) Remarquant que $1-\ln(2)\geq 0$, on obtient

$$g(\ln(2n))=2n-\ln(2n)=2n-\ln(2)-\ln(n)=g(\ln(n))+n-\ln(2)\geq 1+n-\ln(2)\geq 1.$$

(c) On a, en appliquant la stricte croissante de $g$ (ou de $g^{-1}$)

$$g(\ln(n))\leq n=g(\beta_n)\leq g(\ln(2n))\Longleftrightarrow\ln(n)\leq\beta_n\leq\ln(2n)=\ln(n)+\ln(2).$$

En divisant cet encadrement par $\ln(n)$, on obtient, par application du théorème des gendarmes

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\beta_n}{\ln(n)}=1$$

ou encore

$$\beta_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n).$$

Bravo aux étudiants et collègues ayant représenté avec classe et brio l'ENC Bessières au bois de Vincennes ce Dimanche 3 Octobre pour la course de 10km Odyssea sous la pluie contre le cancer du sein!