ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

À rendre le 30/10 par e-mail

Ce devoir (facultatif et individuel) est à faire lors de la première semaine de vacances d'Automne. On enverra sa production en un seul fichier au format .pdf, avec pages numérotées (dans l'ordre!) et dans le bon sens.

Exercice 1

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Justifier que φ est un automorphisme.

(2) Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(u), \quad \mathrm{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{Vect}(v), \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Vect}(w).$$

(3) Vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (v, u, w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et préciser la matrice D de φ dans cette base.

(4) En déduire une matrice P, inversible, telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter la matrice D^{-1}.

(5) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer Q^2 et QDQ.

(6) En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

On considère f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x, y, z) = (x, -z, y + 2z).$$

On note M la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On considère également les vecteurs u_1 et u_2 de $\mathbb{R}^3$ définis par : $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$.

(7) Expliciter la matrice M et montrer que M est inversible.

(8) (a) Montrer que (u_1, u_2) forme une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
(b) Déterminer un vecteur u_3 de $\mathbb{R}^3$ tel que : $f(u_3) - u_3 = u_2$.
(c) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On admet que $\mathcal{B}_2 = (u_1, -u_2, u_3)$ est également une base de $\mathbb{R}^3$.

(9) (a) Écrire la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
(b) Justifier que les matrices M_1 et M_2 sont semblables, et calculer $M_1 M_2$.

(10) En déduire que les matrices M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

On considère la matrice T de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $N = T - I_3$.

(11) Justifier que la matrice T est inversible.

(12) (a) Calculer N^3 et $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2)$.
(b) En déduire une expression de T^{-1} en fonction de I_3, N et N^2.

(13) On note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est N.

(a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g \circ g(u) \neq 0$ et $g \circ g \circ g(u) = 0$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}_3 = (g \circ g(u), g(u), u)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
(c) Écrire la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$.
(d) Calculer $N^2 - N$ et en déduire que les matrices N et $N^2 - N$ sont semblables.

(14) Montrer que les matrices T et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Le but de cet exercice est d'étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions positives de l'équation

$$(E_n) \qquad\qquad e^x = x^n.$$

Pour ce faire, on introduit la fonction $f_n : x \mapsto 1 - x^n e^{-x}$.

Partie I : Étude des solutions positives de (E_1) et (E_2)

(1) Étudier et représenter graphiquement les fonctions f_1 et f_2 sur $[0; +\infty[$.
(2) Conclure quant à l'existence de solutions positives pour (E_1) et (E_2).

Partie II : Études des solutions positives de (E_3)

(3) Étudier et représenter sur $[0;+\infty[$ la fonction f_3.
On donne, pour guider l'étude, le résultat d'affichage `SciLab` des instructions suivantes

```
for k=1:5
    disp(exp(k))
end
```

```
  -->
2.7182818
7.3890561
20.085537
54.598150
148.41316
```

(4) En déduire que l'équation (E_3) admet deux solutions positives u et v vérifiant $1 < u < v$. Encadrer u puis v par deux entiers consécutifs.

(5) On introduit la suite (y_n) définie par son premier terme $y_0 > u$ et la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$.

(a) (i) Montrer que si $y_0 \in]u, v]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in]u, v]$.
(ii) Montrer que si $y_0 \geq v$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \geq v$.
(iii) Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.

(b) Déduire des questions précédentes le sens de variations de la suite (y_n) en fonction d'où se trouve son premier terme.
(c) Étudier la convergence de (y_n).

(d) On choisit alors $y_0 = 4$.

(i) Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq v - y_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(v - y_n)$.
(ii) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq v - y_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

(iii) Écrire un programme `SciLab` qui permette de fournir une valeur approchée de v à 10^{-4} près.

Partie III : Étude des solutions positives de (E_n) pour $n \geq 3$

(6) Étudier la fonction f_n sur $[0;+\infty[$. En déduire que (E_n) admet deux solutions positives notées u_n et v_n et vérifiant $1 < u_n < v_n$.

(7) Déterminer, pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. En déduire le sens de variations de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci vers une certaine limite ℓ.

(8) Montrer que $u_n = \exp(u_n/n)$. En déduire la valeur de ℓ. En déduire également un équivalent simple de $u_n - \ell$ lorsque $n \to +\infty$.

(9) Déterminer, pour $n \geq 4$, le signe de $f_{n-1}(v_n)$. En déduire le sens de variations de (v_n).

(10) Établir que la fonction $g: \ x \mapsto x - \ln(x)$ réalise dune bijection de $[1; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer. Vérifier que $g(v_n/n) = \ln(n)$ puis conclure quant à la limite de (v_n) et proposer un équivalent de v_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 3

Partie 1 : Étude préliminaire

On **admet** que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x)$ sa somme :

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

(1) Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(2) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n > k$, **montrer** :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(3) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

(4) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Partie 2 : Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.

- On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.

(2) `SciLab`

(a) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante afin qu'elle renvoie une simulation de la variable X.

```
function res=X( )
    N=...................
    res=...................
endfunction
```

(b) Obtenir une estimation de $P(X = 0)$. Expliquer la méthode. (On joindra les figures.)

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $P_{[N=n]}(X=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
(4) En déduire, en utilisant un système complet d'évènements associé à la variable N, vérifier que $P(X=0) = \frac{4}{9}$.
(5) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[N=n]}(X=k)$.
On distinguera les cas $k \in [\![0;n]\!]$ et $k > n$.
(6) En déduire, en utilisant également l'étude préliminaire, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X=k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k$$

(7) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.
(8) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X \leqslant k) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

Bonus - Exercice 4

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) (a) Étudier, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n.$$

(b) Montrer que dans tous les cas

$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2.$$

(c) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

(2) On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) (*) Justifier que A est diagonalisable.
(b) Déterminer une matrice P inversible (dont la première ligne est composée de 1) telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

☞ Indication. On pourra poser $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ et déterminer x et y de sorte que $AP = PD$ (et vérifier que la matrice obtenue est bien inversible), ou on pourra interpréter P comme une matrice de passage vers une base (u, v) dont les vecteurs u et v seront dans certains noyaux de la forme $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue X matrice carrée de taille 2

$$(E_n) \quad X^{n+1} + X^n = A.$$

(a) En posant $Y = P^{-1}XP$, montrer que X solution de (E_n) est équivalent à Y solution de

$$(E'_n) \quad Y^{n+1} + Y^n = D.$$

(b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que, si Y solution de (E'_n), alors Y et D commutent.
(ii) En déduire que $b = c = 0$.
(iii) Quelle sont les valeurs possibles de a?

(iv) Discuter, suivant les valeurs de n, le nombre de solutions de l'équation (E_n).

(c) On note α la solution négative de l'équation numérique $x^4+x^3=2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de α.