ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°3

Solution

Exercice 1

Cet exercice est extrait (en incluant des modifications à la Partie A) du sujet **EML 2019**.

On rappelle que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ sont dites semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $B = P^{-1}AP$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier des exemples de matrices inversibles qui sont semblables à leur inverse. Les trois parties de cet exercice sont indépendantes entre elles.

Partie A : Premier exemple

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) La matrice A est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale, elle est donc inversible et l'endomorphisme qu'elle représente, φ bijectif: c'est un automorphisme.

(2) On résout

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I) \iff (A-I)X = 0$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y+z & = & 0 \\ -y/2 & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) \iff \left(A - \frac{1}{2}I\right) X = 0$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x/2 - y + z & = & 0 \\ (3/2)z & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin,

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - 2I) \iff (A - 2I)X = 0$$
$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x - y + z & = & 0 \\ -(3/2)y & = & 0 \end{array} \right.$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad \text{et} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3) La famille $\mathcal{B}' = (v, u, w)$ est composée de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Pour qu'elle en forme une base, il suffit alors de vérifier qu'elle est libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$av + bu + cw = 0.$$

Alors, on a le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2a + b + c & = & 0 \\ a & = & 0 \\ c & = & 0 \end{array} \right. \iff a = b = c = 0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ forme bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par construction de v, u, w, on a

$$D = \operatorname{Mat}(\varphi, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En effet, $u \in \operatorname{Ker}(\varphi - \mathrm{id})$ donc $\varphi(u) = u$, $v \in \operatorname{Ker}(\varphi - (1/2)\mathrm{i}d)$ donc $\varphi(v) = (1/2)v$ et $w \in \operatorname{Ker}(\varphi - 2\mathrm{id})$ donc $\varphi(w) = 2w$.

(4) En introduisant la matrice de passage de la base canonique vers la base $\mathcal{B}'$, c'est à dire

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base permet d'affirmer que

$$A = PDP^{-1}.$$

De plus, comme D est diagonale, on peut directement affirmer que

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2) \end{pmatrix}.$$

(5) On note $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Le calcul donne

$$Q^2 = I_3, \qquad \text{et} \qquad QDQ = D^{-1}.$$

(6) Remarquons d'abord que d'après la question précédente, $Q.Q = I_3$, c'est-à-dire que Q est inversible et $Q^{-1} = Q$.
Par ailleurs $A = PDP^{-1}$ donc $A^{-1} = (PDP^{-1})^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$, or $D^{-1} = QDQ$ d'après la question précédente, donc

$$A^{-1} = PQDQP^{-1} = PQDQ^{-1}P^{-1}.$$

Enfin $D = P^{-1}AP$ donc

$$A^{-1} = PQ(P^{-1}AP)Q^{-1}P^{-1} = PQP^{-1}APQ^{-1}P^{-1} = (PQP^{-1})A(PQP^{-1})^{-1}.$$

Ainsi si l'on note $R = PQP^{-1}$, on a $A^{-1} = RAR^{-1}$, c'est-à-dire que A et A^{-1} sont semblables.

Partie B : Deuxième exemple

(7) On a $f(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(0,1,0) = (0,0,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-1,2)$ donc

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Or, la permutation des lignes d'une matrice conserve les propriétés d'inversibilité. Ainsi,

$$M \text{ inversible} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ inversible}$$

Mais cette dernière matrice est bien inversible puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire de coefficients diagonaux tous non-nuls. Ainsi M est inversible.

(8) (a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} (M - I_3)X = 0 &\iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \\ &\iff z = -y \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -y \end{pmatrix} = xu_1 + yu_2 \end{aligned}$$

La famille (u_1, u_2) est bien génératrice de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$. Comme ces deux vecteurs sont (non nuls et) clairement non colinéaires, ils en forment également une base.

(b)

$$\begin{aligned} f(u_3) - u_3 = u_2 &\iff (M - I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -y - z &=& 1 \\ y + z &=& -1 \end{array} \right. \\ &\iff z = -y - 1 \end{aligned}$$

Ainsi on peut par exemple choisir $x = 0$, $y = 0$, et $z = -1$ ce qui donne $u_3 = (0, 0, -1)$.

(c) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $au_1 + bu_2 + cu_3 = 0$. Alors,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ -b - c &=& 0 \end{array} \right.$$

d'où $a = b = c = 0$. Ainsi la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus elle est constituée de trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ (de dimension 3) et en forme donc une base.

(9) (a) On a montré précédemment que (u_1, u_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, donc $f(u_1) = u_1$ et $f(u_2) = u_2$. Enfin on a choisi u_3 tel que $f(u_3) - u_3 = u_2$, c'est-à-dire $f(u_3) = u_2 + u_3$. Ainsi la matrice de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est alors

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminons maintenant M_2 : on a $f(u_1) = u_1$, $f(-u_2) = -f(u_2) = -u_2$ par linéarité de f et
$f(u_3) = -(-u_2) + u_3$, donc

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) M_1 et M_2 représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes, elles sont donc semblables (en effet si on note R la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ alors $M_2 = R^{-1}M_1R$ d'après la formule de changement de base).
Le calcul donne $M_1M_2 = I_3$.

(10) On vient de montrer que $M_1M_2 = I_3$, donc M_1 est inversible et $M_1^{-1} = M_2$.
M et M_2 représentent le même endomorphisme f donc M et M_2 sont semblables. Par ailleurs M^{-1} et M_1^{-1} représentent le même endomorphisme f^{-1} donc M^{-1} et M_1^{-1} sont semblables. Autrement dit M^{-1} et M_2 sont semblables puisque $M_1^{-1} = M_2$.
Finalement on a montré que M et M^{-1} sont toutes deux semblables à la même matrice M_2. Ainsi par transitivité M et M^{-1} sont semblables.

Partie C : Troisième exemple

(11) T est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux tous non-nuls, donc T est inversible.

(12) (a) Le calcul donne $N^3 = 0$. Ainsi,

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 - N + N^2 + N - N^2 + N^3 = I_3 + N^3 = I_3.$$

(b) On vient de montrer que $(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3$, donc $I_3 + N = T$ est inversible et

$$T^{-1} = I_3 - N + N^2.$$

(13) (a) On vérifie par le calcul que $N^2 \neq 0_3$, donc g^2 n'est pas l'endomorphisme nul, donc il existe $u \in \mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$. En revanche $N^3 = 0$ donc g^3 est l'endomorphisme nul, en particulier $g^3(u) = 0$.

(b) Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ag^2(u) + bg(u) + cu = 0$. Alors en appliquant g^2 et par linéarité de g^2, on obtient $ag^4(u)+bg^3(u)+cg^2(u) = g^2(0) = 0$, autrement dit puisque $g^3(u) = g^4(u) = 0$, $cg^2(u) = 0$.
Or $g^2(u) \neq 0$ donc $c = 0$.
L'équation initiale se récrit donc : $ag^2(u) + bg(u) = 0$. En appliquant g qui est linéaire, on obtient alors : $ag^3(u) + bg^2(u) = 0$, c'est-à-dire $bg^2(u) = 0$, or $g^2(u) \neq 0$, donc $b = 0$.
Finalement il reste $ag^2(u) = 0$, d'où $a = 0$. On a donc montré que $a = b = c = 0$, et donc la famille $\mathcal{B}_3$ est libre. Il s'agit par ailleurs d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) On a $g\big(g^2(u)\big) = g^3(u) = 0$, $g\big(g(u)\big) = g^2(u)$, et $g(u) = g(u)$ donc la matrice de g dans la base $\mathcal{B}_3$ est :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Le calcul donne

$$N^2 - N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_3.$$

Or M_3 et N sont semblables car elles représentent le même endomorphisme g dans des bases différentes. Ainsi $N^2 - N$ et N sont semblables.

(14) D'après la question précédente il existe une matrice U inversible telle que $N = U^{-1}(N^2 - N)U$. En remarquant que $I_3 = U^{-1}U$, on peut alors écrire

$$T = I_3 + N = U^{-1}U + U^{-1}(N^2 - N)U = U^{-1}(I_3 + N^2 - N)U.$$

Or d'après la question 12b), $T^{-1} = I_3 + N^2 - N$, donc $T = U^{-1}T^{-1}U$, autrement dit$T$ et T^{-1} sont semblables.

Exercice 2

Cet exercice reprend une partie du sujet **ESSEC 1995**.

Le but de cet exercice est d'étudier, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions positives de l'équation

$$(E_n) \qquad\qquad e^x = x^n.$$

Pour ce faire, on introduit la fonction $f_n : x \mapsto 1 - x^n e^{-x}$.

Partie I : Étude des solutions positives de (E_1) et (E_2)

(1) C'est parti. Cela risque d'être un peu long et fastidieux mais on s'accroche.

- Pour $f_1 : x \mapsto 1 - xe^{-x}$.
La fonction f_1 est combinaison de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Le calcul donne, pour $x \geq 0$, $f_1'(x) = (x - 1)e^{-x}$, dont on détermine le signe sans difficulté, ainsi que les variations de f_1 qui permettent le tracé de l'allure de la courbe. On observe que, par croissance comparée

$$\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1.$$

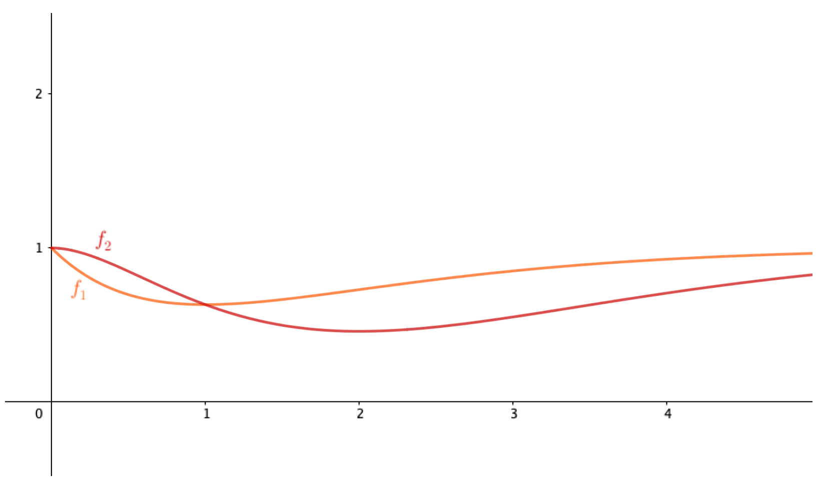
x	0		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
f_1	1	$\searrow$	$1-1/e>0$	$\nearrow$	1

- Pour $f_2 : \ x \mapsto 1 - x^2 e^{-x}$.
  Pour les mêmes raisons, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour $x \geq 0$, on a $f_2'(x) = (x^2 - 2x)e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$ dont le signe s'obtient tout aussi facilement que précédemment. Toujours par croissance comparée,

$$\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = 1.$$

x	0		2		$+\infty$
$f_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f_2	1	$\searrow$	$1-4/e^2>0$	$\nearrow$	1

On représente simultanément les deux fonctions:



(2) L'étude précédente a montré que f_1 et f_2 présentaient des minimums sur $\mathbb{R}_+$ strictement positifs et ne s'annulaient donc pas. Or,

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E_n) &\iff e^x = x^n \\ &\iff 1 = x^n e^{-x} \qquad \text{(car } e^x \neq 0\text{)} \\ &\iff f_n(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions positives de (E_n) sont les antécédents de 0 par f_n. Comme f_1 et f_2 ne passent pas par 0, les équations (E_1) et (E_2) n'ont donc pas de solution positive.

Partie II : Études des solutions positives de (E_3)

(3) On étudie rapidement la fonction $f_3 : x \mapsto 1 - x^3 e^{-x}$. Comme précédemment dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$, on a

$$f_3'(x) = (x^3 - 3x^2)e^{-x} = x^2(x-3)e^{-x}$$

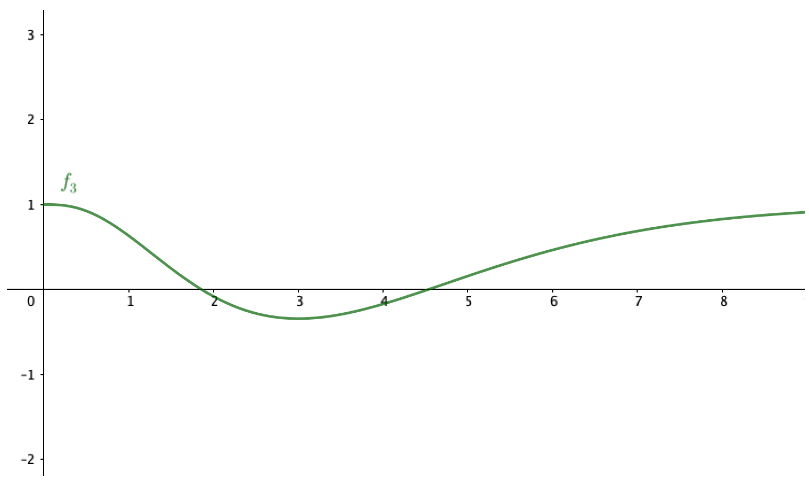
donnant le tableau ci-dessous (encore une fois, on a par croissance comparée une limite égale à 1 en $+\infty$)

x	0	u	3	v	$+\infty$
$f_3'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f_3	1 $\searrow$	0 $\searrow$	$1 - 27/e^3$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

Attention, ce qui change ici, c'est le signe du minimum

$$f_3(3) = 1 - \frac{27}{e^3} = \frac{e^3 - 27}{e^3} < 0$$

d'après l'approximation pour e^3 fournie par le texte : $e^3 \simeq 20.085537$. On a l'allure suivante:



(4) On sait que les solutions positives de (E_3) sont les solutions positives de $f_3(x) = 0$. En appliquant le théorème de bijection à f_3 sur $]0;3[$ et sur $]3;+\infty[$ (intervalles où la fonction est bien continue et strictement monotone), comme $f_3(3) < 0$, on a bien exactement deux antécédents de 0 sur $\mathbb{R}_=$: un dans $]0;3[$ noté u et un dans $]3;+\infty[$ noté v. Plus précisément, comme $f_3(1) = 1 - 1/e > 0$ et que f_3 strictement décroissante sur $]0;3[$, on sait même que $1 < u$. On a bien

$$1 < u < v.$$

Les estimations de $e, e^2, .., e^5$ fournies par le texte nous permettent de donner le signe de $f_3(k)$ pour $1 \leq k \leq 5$. On a

$$f_3(2) = \frac{e^2 - 8}{e^2} > 0, \quad f_3(4) = \frac{e^4 - 64}{e^4} > 0, \quad f_3(5) = \frac{e^5 - 125}{e^5} < 0.$$

Sachant que f_3 est strictement décroissante sur $]0;3[$ et strictement croissante sur $]3;+\infty[$, on peut donc affirmer que

$$1 < u < 2 \qquad \text{et} \qquad 4 < v < 5.$$

(5) On introduit la suite (y_n) définie par son premier terme $y_0 > u$ et la relation $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$.

(a) (i) C'est une récurrence dont il n'est nécessaire de montrer que l'hérédité par hypothèse sur y_0. Supposons donc que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u < y_n \leq v$. Alors, par stricte croissance de la fonction $t \mapsto 3\ln(t)$, on a

$$3\ln(u) < y_{n+1} \leq 3\ln(v).$$

Et là il faut un peu de suite dans les idées et revenir à la définition de u et v. On sait que u et v solutions de (E_3) donc

$$u^3 = e^u \iff 3\ln(u) = u, \qquad \text{et} \qquad v^3 = e^v \iff 3\ln(v) = v$$

On a donc bien

$$u < y_{n+1} \leq v$$

et la récurrence est terminée.

(ii) C'est quasiment la même récurrence. Si $y_n \geq v$, alors par croissante de $t \mapsto 3\ln(t)$, on a $y_{n+1} \geq 3\ln(v) = v$.

(iii) Si $y_n - y_{n-1} \geq 0$, alors $y_n \geq y_{n+1}$ et par croissante de $t \mapsto 3\ln(t)$, on a $y_{n+1} \geq y_n$ ou encore $y_{n+1} - y_n$. De même, si $y_n - y_{n-1} < 0$, la croissance de la même fonction donne aussi $y_{n+1} - y_n < 0$. Au final, le signe de $y_{n+1} - y_n$ est toujours le même que celui de $y_n - y_{n-1}$, il est donc constant et donc aussi le même que celui de $y_1 - y_0$.
Autrement dit, la suite est donc monotone et son sens de variation est celui dans lequel sont rangés les deux premiers termes.

(b) D'après la question précédente, si y_0 se trouve dans un intervalle où $y_1 - y_0 \geq 0$ alors la suite est croissante et décroissante sinon. Or,

$$y_1 - y_0 \geq 0 \iff 3\ln(y_0) \geq y_0 \iff y_0^3 \geq e^{y_0} \iff f_3(y_0) \leq 0 \iff y_0 \in]u; v].$$

Au final,

- si $y_0 \in]u, v]$, alors la suite (y_n) est croissante;
- si $y_0 > v$, alors la suite (y_n) est décroissante.

(c) On différencie les cas comme ci-avant:

- si $y_0 \in]u, v]$, alors la suite (y_n) est croissante; elle est majorée par v. D'après le théorème de convergence monotone, elle converge vers une certaine limite $\ell \in [y_0, v]$. Comme $y_{n+1} = 3\ln(y_n)$ et que la fonction $t \mapsto 3\ln(t)$ est continue sur $[y_0; v]$, le passage à la limite donne $\ell = 3\ln(\ell)$. Or les solutions de $x = 3\ln(x)$ sont aussi les solution de (E_3) c'est à dire u et v. Mais, comme $\ell \in [y_0, v]$ et que $y_0 > u$, on a $\ell = v$.

- si $y_0 > v$, alors la suite (y_n) est décroissante; elle est minorée par v. Elle converge (par convergence monotone) et c'est encore vers v.

Dans tous les cas, on peut dire que (y_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} y_n = v.$$

(d) On choisit alors $y_0 = 4$.

On sait que dans ce cas, (y_n) est croissante est converge vers v.

(i) On pense tout de suite à appliquer l'IAF à la fonction $h:\ t \mapsto 3\ln(t)$ sur l'intervalle $[4; 5]$ qui contient bien tous les termes de la suite et v d'après ce qui précède, et où la fonction susnommée est bien de classe $\mathcal{C}^1$. On a, pour tout $t \in [4; 5]$,

$$-\frac{3}{4} < 0 < h'(t) = \frac{3}{t} \leq \frac{3}{4}.$$

Il suit, par IAF, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|h(y_n) - h(v)| = |y_{n+1} - v| \leq \frac{3}{4}|y_n - v|.$$

Comme $y_n \leq v$, on peut réécrire

$$0 \leq v - y_{n+1} \leq \frac{3}{4}(v - y_n),$$

ce qu'on voulait.

(ii) Une récurrence immédiate, que l'on omet ici car on en a fait mille similaires, permet d'obtenir

$$0 \leq v - y_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

À noter quand même que pour initialiser cette récurrence, on doit bien dire que $v - y_0 \leq 1$ car $y_0 = 4$ et $v \in [4; 5]$.

(iii) La question précédente permet d'avoir une information sur la vitesse de convergence de (y_n) vers v et permet d'avoir une estimation ne dépendant que de n sur l'écart entre v et y_n qui permet d'avoir une condition d'arrêt de la boucle `while`.
C'est en effet y_n qui fournit l'approximation de v dès lors que $v - y_n < 10^{-4}$.

```
y=4
n=0
while (3/4)^n >= 10^(-4)
    n=n+1
    y=3*log(y)
end
disp(y)
```

Partie III : Étude des solutions positives de (E_n) pour $n \geq 3$

(6) Comme précédemment, pour $x \geq 0$, on a

$$f_n'(x) = (x^n - nx^{n-1})e^{-x} = x^{n-1}(x - n)e^{-x},$$

dont on obtient facilement le signe puis les variations de f_n. Toujours par croissance comparée, f_n admet une limite qui vaut 1 en $+\infty$. Le minimum de f_n est atteint en n et vaut

$$f_n(n) = 1 - \left(\frac{n}{e}\right)^n < 0$$

car $n \geq 3$ donc $n > e$ et $n/e > 1$ donc $(n/e)^n > 1^n = 1$.

Le tableau de variations est le suivant:

x	0	u_n	n	v_n	$+\infty$
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f_n	1 ↘	0 ↘	$1-(n/e)^n$	↗ 0	↗ 1

Ensuite, on réapplique encore et encore le théorème de bijection deux fois (sur $]0; n[$ et sur $]n; +\infty[$) où f_n est toujours continue et strictement monotone pour exhiber deux antécédents de

0 et donc les deux seules solutions positives de (E_n) notées respectivement u_n et v_n. Comme $f_n(1) = 1 - 1/e > 0$ on a aussi $1 < u_n$. On a bien

$$1 < u_n < v_n.$$

(7) Soit $n \geq 4$. On a sait que, par définition, $u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1$, donc

$$\begin{aligned} f_n(u_{n-1}) &= 1 - u_{n-1}^n e^{-u_{n-1}} = 1 - u_{n-1}\left(u_{n-1}^{n-1} e^{-u_{n-1}}\right) \\ &= 1 - u_{n-1} < 0 = f_n(u_n) \end{aligned}$$

Or f_n est strictement décroissante (et bijective) sur $]0; n[$ où vivent bien u_n et u_{n-1}. On en déduit que

$$u_{n-1} > u_n$$

c'est à dire que la suite (u_n) est décroissante. Étant minorée (par 1), elle converge vers une certaine limite $\ell \geq 1$ par application du théorème de convergence monotone.

(8) Par définition, $u_n^n = e^{u_n}$ ou encore, par écriture exponentielle

$$\exp(n \ln(u_n)) = \exp(u_n) \Longleftrightarrow \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \Longleftrightarrow u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right),$$

ce qu'on voulait. Mais, $u_n/n \to 0$ par algèbre des limites, et par composition avec l'exponentielle,

$$u_n = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right) \longrightarrow \exp(0) = 1$$

donc $\ell = 1$. Comme $u_n/n \to 0$, l'équivalent usuel de $e^x - 1$ en 0 donne

$$u_n - 1 = \exp\left(\frac{u_n}{n}\right) - 1 \sim \frac{u_n}{n} \sim \frac{1}{n}, \qquad n \to +\infty.$$

(9) Exactement comme précédemment

$$\begin{aligned} f_{n-1}(v_n) &= 1 - v_n^{n-1} e^{-v_n} = 1 - \frac{v_n^n e^{-v_n}}{v_n} \\ &= \frac{v_n - 1}{v_n} > 0 = f_{n-1}(v_{n-1}) \end{aligned}$$

Mais cette fois, f_{n-1} est strictement croissante (et bijective) sur $]n-1; +\infty[$ dont v_{n-1} et v_n sont bien des éléments donc $v_{n-1} \leq v_n$ et la suite (v_n) est croissante.
Par ailleurs comme $v_n \geq n$, par comparaison $v_n \to +\infty$.

(10) La fonction $g : \ x \mapsto x - \ln(x)$ est continue, dérivable sur $[1; +\infty[$. Pour tout élément x de cet intervalle, on a $g'(x) = 1 - 1/x = (x-1)/x > 0$ et donc g y est strictement croissante. Comme $g(1) = 1$ et $g(x) \to +\infty$ (par croissance comparée) en $+\infty$, le théorème de bijection permet d'affirmer que g réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$.

Pour les mêmes raisons que précédemment à propos de la suite (u_n), on sait que $v_n = \exp(v_n/n)$ et donc $\ln(v_n) = v_n/n$ donc

$$\begin{aligned} g(v_n/n) &= \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(v_n) - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) \\ &= \ln(v_n) - \ln(v_n) + \ln(n) \\ &= \ln(n), \end{aligned}$$

comme attendu. Notant g^{-1} la bijection réciproque de g, on peut alors écrire

$$v_n = n g^{-1}(\ln(n))$$

et on retrouve le fait que v_n tend vers $+\infty$ par algèbre des limites (car $g^{-1}(y) \to +\infty$ si $y \to +\infty$).

La dernière partie de la question est un peu plus subtile car il faut avoir un équivalent de $g^{-1}(y)$ lorsque $y \to +\infty$. Par croissance comparée, $g(x) \sim x,\ x \to +\infty$ donc

$$\frac{g(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

En appliquant à $x = g^{-1}(y) \to +\infty$, lorsque $y \to +\infty$, on a

$$\frac{y}{g^{-1}(y)} = \frac{g(g^{-1}(y))}{g^{-1}(y)} \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

et donc $g^{-1}(y) \sim y,\ y \to +\infty$ ce qui permet d'écrire que $g^{-1}(\ln(n)) \sim \ln(n)$ puis

$$v_n = ng^{-1}(\ln(n)) \sim n\ln(n), \qquad n \to +\infty.$$

Exercice 3

Ce sujet provient d'une annale de **EML 2002**.

Partie 1 : Étude préliminaire

On **admet** que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n\geqslant k}\binom{n}{k}x^n$ est convergente et on note $s_k(x)$ sa somme :

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n.$$

(1) On a, en reconnaissant la somme de la série géométrique qui converge car $x \in [0,1[$:

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{0}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On a, en reconnaissant la somme de la série géométrique dérivée qui converge car $x \in [0,1[$:

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{1}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}nx^n = x\sum_{n=0}^{+\infty}nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0,1[$

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(2) Soit $n > k$. Alors, les coefficients binomiaux proposés sont bien définis et on a :

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\\ &= \frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}\\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}\\ &= \binom{n+1}{k+1}\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n > k$, on a bien

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(3) On a :

$$\begin{aligned}
s_{k+1}(x) &= \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} \\
&= \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^n \\
&= \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^n \qquad \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

La formule est valable car dans cette dernière somme, $n > k$. On ne pouvait pas appliquer cette formule à la deuxième ligne car le premier terme est $n = k$.
On obtient donc, on remarquant que $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} = 1$:

$$\begin{aligned}
s_{k+1}(x) &= \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x \binom{k}{k} x^k + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x s_k(x) + x s_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0,1[$

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

(4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $\mathcal{P}(k) :\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

- <u>initialisation:</u> D'après la Question (1), on a : $s_0(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x^0}{(1-x)^1}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- <u>hérédité:</u> Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a d'après la question précédente

$$\forall x \in [0,1[, \qquad s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x),$$

ce qui donne

$$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_k(x)$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
On a donc :

$$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Partie 2 : Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
- On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(1) N est le temps d'attente du premier succès (obtenir une boule noire) de probabilité $p = 1/5$ lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli (tirer une boule) identiques et indépendantes (tirage avec remise).
Donc $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $E(N) = 5$.

(2) `SciLab`

(a) Comme X dépend du résultat de N, on commence par simuler N, avec la loi géométrique précédemment identifiée et on utilise la valeur ainsi générée pour simuler X. Il est relativement clair que *sachant* $[N = n]$ (c'est à dire connaissant la valeur de N et donc le nombre de tirages qu'on fait ensuite dans l'urne), on a un nouveau schéma de Bernoulli répété n fois et donc on peut utiliser la loi binomiale de paramètres n et $1/5$.

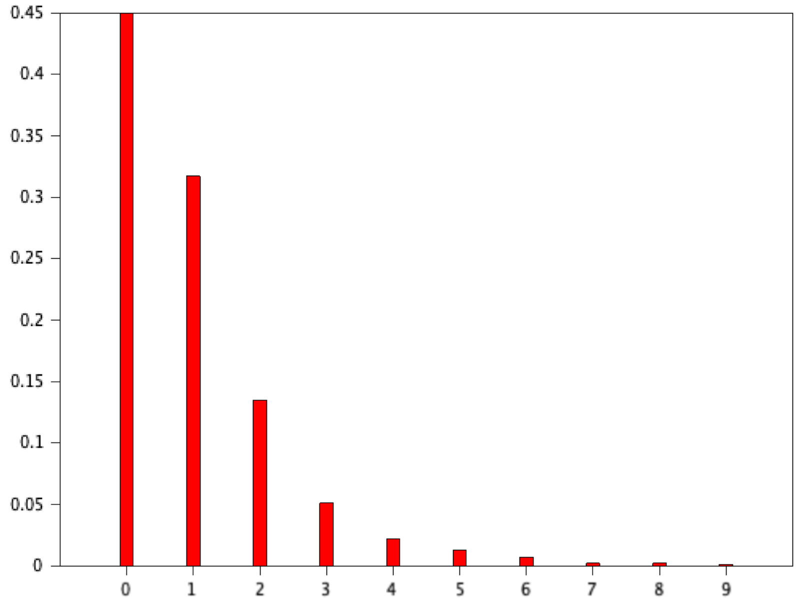
```
function res=X( )
    N=grand(1,1,'geom', 1/5)
    res=grand(1,1, 'bin', N, 1/5)
endfunction
```

(b) On va alors simulter 1000 fois la variable X, trier les valeur obtenus et représenter le diagramme à bâtons des fréquences des valeurs obtenus. La hauteur du bâton en face de 0 donne alors une estimation de $P(X = 0)$, même si on a pas encore rencontré cette notion (le Chapitre sur l'*Estimation* est le dernier), cette approche intuitive nous parait suffisante.

```
//échantillon de taille 1000 de X
L=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    L(k)=X( )
end

//tri des valeurs
U=tabul(L, 'i')

//diagramme à bâtons
bar(U(:,1), U(:, 2)/1000, width=0.2, 'red')
```



On peut alors conjecturer que $P(X=0) \simeq 0.45$.

(3) Sachant que $[N=n]$, l'évènement $(X=0)$ signifie que l'on n'a obtenu aucune boule noire (de probabilité $p=1/5$) lors de n tirages identiques et indépendantes (tirage avec remise). Ainsi,

$$P_{[N=n]}(X=0) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

(4) Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $(N=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements. On a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{N=n}(X=0)P(N=n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{n-0}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5} \end{aligned}$$

car d'après la question précédente

$$P_{N=n}(X=0) = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^{n-0}.$$

Seule la première formule est valable car $k=0$ et $n \geq 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{p+1}\left(\frac{4}{5}\right)^p \\ &= \frac{1}{5}\frac{4}{5}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{16}{25}\right)^p = \frac{4}{25}\frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{4}{25}\frac{25}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Finalement,

$$P(X=0) = \frac{4}{9},$$

ce qui est très proche du 0.45 conjecturé...

(5) Tout d'abord, on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Il est clair qu'on ne peut obtenir plus de boules noires que l'on fait de tirages, donc

$$P_{N=n}(X = k) = 0, \qquad \text{si} \quad k > n.$$

De plus, sachant que $[N = n]$, X compte le nombre de succès (obtenir une boule noire) de probabilité $p = 1/5$ lors de n épreuves de Bernoulli (tirer une boule) identiques et indépendantes (tirage avec remise).
Donc, **sachant** $[N = n]$, X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est :

$$P_{N=n}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

(6) Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements. On a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{N=n}(X = k)P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} P_{N=n}(X = k)P(N = n) \end{aligned}$$

car d'après la question précédente : $P_{N=n}(X = k) = 0$ si $n < k$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{16}{25}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} s_k\left(\frac{16}{25}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1-\frac{16}{25}\right)^{k+1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}} = \frac{1}{4}\frac{25}{9}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^k} = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

(7) $E(X)$ existe si la série $\sum kP(X = k)$ converge absolument donc si elle converge car les termes sont positifs. On a :

$$\begin{aligned} kP(X = k) &= k\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k \\ &= \frac{25}{36}\times\frac{4}{9}\times k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée qui converge car $0 < 4/9 < 1$ donc $E(X)$ existe et on a :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \frac{25}{81}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}\\
&= \frac{25}{81}\frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2}\\
&= \frac{25}{81}\left(\frac{9}{5}\right)^2 = 1
\end{aligned}$$

Ainsi, $E(X)$ existe et on a : $E(X) = 1$.

(8) C'est encore une somme (finie) à calculer

$$\begin{aligned}
P(X \leq k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \frac{4}{9} + \sum_{i=1}^{k}\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^i\\
&= \frac{4}{9} + \frac{25}{36}\times\frac{4}{9}\times\frac{1-\left(\frac{4}{9}\right)^k}{1-\frac{4}{9}}\\
&= \frac{4}{9} + \frac{5}{9}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^k\right) = 1 - \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^k.
\end{aligned}$$

Bonus - Exercice 4

Ce chouette exercice provient d'un vieux sujet **ESCP 1998**.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) (a) La fonction f_n est polynomiale donc définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout x réel, sa dérivée vaut $f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x+n)$. Il suit alors que, le signe de cette dérivée va dépendre de la parité de n, car, selon cette parité, x^{n-1} sera toujours positif ou nul ou changera de signe en zéro. Plus précisément,

- si n est pair, alors $n-1$ est impair et on a le tableau suivant

x	$-\infty$		$\frac{-n}{n+1}$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$		$-$	0	$+$	
$(n+1)x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_n	$-\infty$	$\nearrow$	$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- si n est impair, alors $n-1$ est pair et on a le tableau suivant

x	$-\infty$		$\frac{-n}{n+1}$		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$		$+$	0	$+$	
$(n+1)x+n$		$-$	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
f_n	$+\infty$	$\searrow$	$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) Dans tous les cas, on a

$$\begin{aligned} f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} \\ &= (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \end{aligned}$$

Comme $0 < \frac{n}{n+1} < 1$ et $0 < \frac{1}{n+1} < 1$, on a

$$0 < \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \times \frac{1}{n+1} < 1.$$

Il suit que, peu importe la parité de n, l'expression précédente sera toujours strictement inférieure à 2: si n est pair, $(-1)^n = 1$ et c'est alors clair par l'argument ci-dessus, mais si n impair, alors $(-1)^n = -1$ et toute l'expression est négative et donc, *a fortioti*, strictement inférieure à 2.

(c) On a, pour toute valeur de n, $f_n(1) = 2$. Ainsi, 1 est toujours solution de l'équation. D'après les tableaux de variations précédents, le théorème de bijection (f_n étant continue) permet de conclure quant au nombre de racines de l'équation $f_n(x) = 2$. Plus précisément,

- Si n est pair, comme $f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right) < 2$, il n'y a qu'un seul antécédent et c'est 1.

- Si n est impair, il y a exactement deux solutions; une dans l'intervalle $]-\infty; -\frac{n}{n+1}[$ et 1.

(2) On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice A est symétrique donc diagonalisable.

(b) Le sujet demande de trouver une matrice P inversible telle que

$$A = PDP^{-1}.$$

Il faut donc trouver une matrice de passage P (dont les deux colonnes correspondront à deux vecteurs que l'on va nommer u et v) telle que D soit la matrice de l'endomorphisme représenté par A dans la base canonique dans la base (u, v), ce qui impose donc que $Au = 0$ et $Av = 2v$. On résout donc pour trouver de tels u et v:

- Recherche de u:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) \iff MX = 0$$
$$\iff x + y = 0$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On peut donc prendre
$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Recherche de v:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - 2I) \iff MX = 2X$$
$$\iff -x + y = 0$$
$$\iff X = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc prendre
$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On observe que les deux vecteurs u et v sont non colinéaires et forment bien une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On peut donc former la matrice de passage de la base canonique vers (u, v), c'est à dire
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par construction, on a bien
$$A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} = PDP^{-1}$$

(3) (a) On a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_n) &\iff X^{n+1} + X^n = A \\ &\iff P^{-1}\left(X^{n+1} + X^n\right) P = P^{-1}AP \\ &\iff P^{-1}X^{n+1}P^{-1} + PX^nP = D \\ &\iff \left(P^{-1}XP\right)^{n+1} + \left(P^{-1}XP\right)^n = D \\ &\iff Y^{n+1} + Y^n = D \\ &\iff Y \text{ solution de } (E'_n) \text{ et } Y = P^{-1}XP. \end{aligned}$$

(b) Soit donc Y une solution de (E'_n).

(i) Comme Y est solution de (E'_n), alors D s'exprime comme un polynôme en Y, $D = Y^{n+1} + Y^n$, et comme Y commute avec toute puissance d'elle-même, Y commute avec D.

(ii) Si Y commute avec D, alors $YD = DY$. Le calcul explicite donne
$$YD = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix}$$
et
$$DY = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix}.$$

Il suit nécessairement que $b = c = 0$. En particulier, Y est diagonale, et il est facile de calculer ses puissances.

(iii) D'après la question précédentes, on peut calculer $Y^{n+1}+Y^n$:

$$Y^{n+1}+Y^n = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1}+a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1}+d^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, comme Y est solution de (E'_n), on a nécessairement $a^{n+1}+a^n=0 \Longleftrightarrow a^n(a+1)=0$ et donc $a=0$ ou $a=-1$.

(iv) Le nombre de solutions de (E_n) est exactement le même que le nombre de solutions de (E'_n). Pour toutes les déterminer, il reste à trouver les valeurs possibles de d qui doit être solution de

$$d^{n+1}+d^n=2.$$

Le nombre de solutions de cette équation dépend, comme vu en première partie d'exercice, de la parité de n. Ainsi,

- Si n est pair, il y a une seule solution pour d (qui est $d=1$) et l'équation (E_n) aura donc deux solutions (car il y a deux possibilités pour a).
- Si n est impair, il y a deux solutions pour d. L'équation (E_n) aura donc quatre solutions.

(c) On note α la solution négative de $x^4+x^3=2$. On sait, d'après toute l'étude précédente, que les solutions de (E'_3) sont

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Ainsi, les quatre solutions de (E_3) sont

$$P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1}, \quad P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}, \quad \text{et} \quad P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}P^{-1},$$

soit les matrices

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha/2 & \alpha/2 \\ \alpha/2 & \alpha/2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (\alpha-1)/2 & (\alpha+1)/2 \\ (\alpha+1)/2 & (\alpha-1)/2 \end{pmatrix}.$$