ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°4

À rendre le 29/11

Ce devoir est à faire ***par groupe de khôlle****. Bien que collectif, tout élément de la production rendue doit avoir été travaillé et compris par l'ensemble du groupe. Toutes les réponses doivent êtres* ***justifiées*** *et* ***soigneusement rédigées****.*

Amuse-bouche

Les questions de cet exercice sont indépendantes

(1) Déterminer la nature des séries

$$(i) \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}, \qquad (ii) \sum_{n\geq 1} n \ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right), \qquad (iii) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}, \qquad (iv) \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

(2) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue.

(a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P([Y=n]) = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$.

(b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance? une variance?

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre p. Le but de l'exercice est de montrer que $Y = 1/X$ admet une espérance et de préciser sa valeur.

(1) Exhiber une série dont la convergence est équivalente à l'existence de $E(Y)$.

(2) Monter que, pour tout $x \in [0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$$

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{1-x} \times \frac{1}{n+1}.$$

En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(4) Conclure.

Exercice 2 : L'ascenseur

Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur. N personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.
Soit X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On note X_i la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon et on note E_k la variable aléatoire qui prend la valeur de l'étage où descend la $k-$ième personne.

(1) Pour tout $k \in [\![1; N]\!]$, quelle est la loi de E_k?
(2) En utilisant les variables aléatoires E_k, déterminer $P(X_i = 0)$.
(3) Calculer $E(X)$.
(4) Déterminer pour i différent de j : $P(X_i = 0 \cap X_j = 0)$.
En déduire $P(X_i X_j = 0)$.
(5) (*) Déduire de la question précédente $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$ puis calculer alors $V(X)$.

Exercice 3

Dans tout cet exercice on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(1) (a) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$P(X = j) = P(X > j-1) - P(X > j).$$

(b) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que

$$\sum_{j=1}^{p} jP(X = j) = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j) - pP(X > p).$$

(2) (a) On suppose dans cette question uniquement que X admet une espérance $E(X) = \mu$.

(i) Justifier la convergence de la série de terme général $kP(X = k)$.
(ii) Montrer que :

$$\lim_{p \to +\infty} \sum_{k=p+1}^{+\infty} kP(X = k) = 0.$$

(iii) En déduire que

$$\lim_{p \to +\infty} pP(X > p) = 0.$$

(iv) Montrer que la série de terme général $P(X > j)$ converge.
(v) Montrer que

$$\mu = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j).$$

(b) Dans cette question, on suppose que $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$ converge et on veut montrer que X admet une espérance.

(i) Déterminer le sens de variation de la suite $(v_p)_{p\geq 1}$ définie par

$$v_p = \sum_{j=0}^{p-1} P(X > j).$$

(ii) Comparer $\sum_{j=1}^{p} jP(X = j)$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)$.

(iii) En déduire que X admet une espérance.

(c) Conclure des questions précédentes que X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $P(X > j)$ converge.

(3) On suppose dans cette question qu'il existe un réel α strictement positif tel que pour tout entier naturel j on ait

$$P(X > j) = \frac{1}{(j+1)^\alpha}. \qquad (*)$$

(a) Légitimer que $(*)$ définit bien une loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que X admet une espérance si et seulement si α est strictement supérieur à 1.

(c) Montrer que pour tout entier naturel j non nul

$$P(X = j) = \frac{1}{j^\alpha}\left(1 - \frac{1}{(1+\frac{1}{j})^\alpha}\right).$$

(d) (i) Étudier les variations de $f : x \mapsto 1 - (1+x)^{-\alpha} - \alpha x$ sur $[0, 1]$.

(ii) Montrer que pour tout entier naturel j non nul,

$$P(X = j) \leq \frac{\alpha}{j^{1+\alpha}}.$$

(e) Montrer, en utilisant le résultat de (c), que

$$\lim_{j\to+\infty} j^{\alpha+1} P(X = j) = \alpha.$$

(f) Montrer que X admet une variance si et seulement si $\alpha > 2$.

Bonus - Des soirées qui comptent

On propose trois exercices de dénombrement, pour le plaisir.

Premier exercice : la soirée de Noël

On cherche à organiser une soirée de Noël. Le service traiteur retenu nous propose, afin d'élaborer un menu, de choisir les plats qui seront proposés aux convives parmi tout un panel de bonnes choses. Plus précisément, on veut créer un menu composé d'une entrée à choisir parmi 2, d'un plat à choisir parmi 3 et d'un dessert. Le traiteur propose une liste comprenant 8 entrées, 10 plats et 6 desserts.

(1) Combien peut-on créer de menus différents ?

(2) Seules la moitié des entrées de la liste conviennent aux végétariens et seulement 3 plats principaux n'ont pas nécessité la mise à mort d'un animal. Combien y a-t-il de menus offrant systématiquement une alternative végétarienne à chacun des convives?

Deuxième exercice : la soirée de Noël, suite

Un enseignant sympathique organise, juste avant les fêtes, un *Secret Santa* pour sa classe. Les n participants mettent leur nom dans une urne et chacun tirera un petit papier et devra offrir un cadeau à la personne dont le nom est inscrit sur le petit papier. On appelle tirage l'attribution d'un papier à chaque participant.

(1) Combien y a-t-il de tirages différents?

(2) L'enseignant adore les cadeaux. Il décide de glisser non pas un seul, mais p papiers avec son nom. Ni vu ni connu.

   (a) Combien y a-t-il de tirages différents dans cette nouvelle disposition? (Chaque participant continue de ne tirer qu'un seul papier).

   (b) Dans combien de ces tirages l'enseignant se fait-il un cadeau à lui-même?

   (c) Quel est le nombre de tirages pour lesquels les p papiers de l'enseignant sont tirés?

Troisième exercice : la soirée déguisée

Afin de préparer la soirée de fin d'année d'une école de n étudiants, on a disposé dans la salle de détente un sac contenant p petits papiers sur chacun desquels est écrit le nom d'un personnage. Chaque étudiant tire au hasard un papier, puis le remet dans le sac, après avoir pris connaissance du personnage qu'il devra incarner. Il est donc possible que plusieurs personnes arrivent avec le même déguisement le jour de la soirée.

On appelle S_n^p le nombre de tirages pour lesquels tous les personnages seront présents à la soirée.

(1) Que vaut S_n^p si $p > n$? Et si $p = n$? Justifier.

(2) Que vaut S_n^1?

(3) On suppose que $p = 2$. On décomposant le nombres de tirages selon le nombre d'étudiants ayant tiré le premier personnage, montrer que $S_n^2 = 2^n - 2$.

(4) Montrer que
$$S_{n+1}^p = p\left(S_n^p + S_n^{p-1}\right).$$
(<u>indication :</u> on pourra compter le nombre de tirages possibles pour n étudiants, une fois qu'un des $n+1$ étudiants a déjà pioché, en différenciant deux cas, selon que le déguisement déjà tiré par l'étudiant est à nouveau pioché ou non.)

(5) On cherche à montrer, à l'aide d'une récurrence sur $n \geq 1$, que, pour tout $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

   (a) On suppose que $n = 1$. Vérifier que l'égalité est vraie si on a également $p = 1$.

   (b) Montrer que l'égalité $(\star)$ est encore vérifiée si $n = 1$ et $p > 1$.

   (c) On suppose que l'égalité $(\star)$ est vérifiée pour une certaine valeur de $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$.

      (i) Vérifier qu'elle est encore vérifiée au rang $n+1$ avec $p = 1$.

      (ii) En utilisant la Question (4) de l'exercice précédent, puis à l'aide de la formule du triangle de Pascal, montrer que l'égalité $(\star)$ est encore vraie au rang $n+1$ pour $p > 1$.