ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°4bis

À rendre quand on veut

Exercice 1

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On effectue successivement trois tirages **sans remise** dans cette urne. On note X le deuxième plus petit numéro obtenu à l'issue de l'expérience.
Par exemple avec $n = 5$, si on tire les boules 4, 1 et 3, on aura $X = 3$.

(1) Il apparait clair que, pour simuler X, il va falloir *trier* les valeurs piochées et prendre le deuxième terme de la liste. On propose donc la fonction de tri suivant qui prend en argument une liste L et renvoie une liste T dont les éléments sont ceux de la liste L dans l'ordre croissant. Expliquer comment elle fonctionne.

```
function T=tri(L)
    N=length(L)
    for i=1:N-1
        x=i
        for j=i+1:N
            if L(j)<L(x) then
                x=j
            end
        end
        aux=L(x)
        L(x)=L(i)
        L(i)=aux
    end
    T=L
endfunction
```

(2) Écrire une fonction d'en-tête `function [k, L]=selection(U)` qui prend en argument une liste de valeurs `U`, choisit aléatoirement (et uniformément) un élément `k` de `U` qu'elle renvoie ainsi que la nouvelle liste `L` composée des valeurs de `U` sauf `k`.

(3) À l'aide de cette fonction, compléter la fonction suivante pour qu'elle simule X.

```
function x=X(n)
    U=1:n
    L=zeros(1,3)
    for i=1:3
        [k,U]=...........
        L(i)=.............
    end
    L=..........
    x=..........
endfunction
```

(4) Pour $n = 5$, déterminer la loi de X.

Exercice 2

On étudie une méthode de détection des porteurs d'un parasite au sein d'un ensemble donné de N individus tirés au sort. La probabilité d'être porteur du parasite dans la population est $p \in]0;1[$. Les personnes sont atteintes indépendemment les unes des autres.

On dispose d'un test permettant d'établir de façon certaine qu'un échantillon de sang contient ou non le parasite, le résultat de ce test étant dit positif dans le premier cas et négatif dans le second.

Pour chacun des N individus, on possède un prélèvement sanguin. On envisage alors deux méthodes de détection:

- Première méthode: on teste un à un les N prélèvements, effectuant ainsi N tests.
- Seconde méthode (*poolage*):
  - On fixe un entier naturel non nul ℓ. On suppose que N est un multiple de ℓ et on pose $N = n \times \ell$. On répartit alors les N prélèvements en n groupes $G_1, G_2, \ldots, G_n$, chaque groupe G_i contenant le même nombre ℓ de prélèvements. Pour chacun des groupes G_i, on extrait une quantité de sang de chacun des l prélèvements qu'il contient, puis on mélange ces extraits, obtenant ainsi un échantillon de sang H_i, caractéristique du groupe G_i.
  - On teste alors H_i:
    - si le test de H_i est négatif, aucun des individus au sein du groupe G_i n'est porteur du parasite. Le travail sur le groupe G_i est alors terminé;
    - si le test de H_i est positif, on teste un à un les prélèvements de G_i pour détecter les porteurs du parasite au sein du groupe G_i.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de groupes G_i pour lesquels le test de H_i a été positif et T la variable aléatoire égale au nombre total de tests effectués dans la réalisation de la méthode du *poolage*.

(1) Écrire une fonction d'en-tête `function y=pool(ℓ,p)` simulant le test sur un groupe de taille ℓ (avec probabilité p de contamination de chaque individu). (La fonction renverra 0 ou 1 selon que le test est négatif ou non).
(2) Écrire alors une fonction d'en-tête `function [X,T]=poolage_sanguin(N,p,ℓ)` renvoyant le résultat simultané de la simulation de X et T.
(3) (*) Déterminer, de manière théorique et rigoureuse $E(T)$.