ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°4

Solution

Amuse-bouche

(1) On utilise les critères de comparaison (des séries à termes positifs).

(i) $\dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}} \sim \dfrac{\sqrt{n}}{n^2} = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}, \quad n \to +\infty$. Or, $\sum 1/n^{3/2}$ converge (Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$) donc, par critère d'équivalence (que l'on peut appliquer car ici tout est positif), la série converge.

(ii) $n \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) \sim n \times \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc la série diverge grossièrement. (On a utilise l'équivalent usuel en 0 du log, à savoir $\ln(u) \sim u, u \to 0$ avec $u = 1/\sqrt{n}$.)

(iii) Celui ci est plus astucieux. Si on veut utiliser une comparaison par négligeabilité, idéalement à une série de Riemann donc de la forme $1/n^\alpha$, il faut choisir $\alpha > 1$ (pour garantir la convergence) mais il faut choisir $\alpha < 3/2$ pour qu'il reste une puissance positive de n au dénominateur et que le quotient avec $1/n^\alpha$ tende bien vers 0 par croissance comparée. On choisit par exemple $\alpha = 5/4$. On a

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{5/4}}} = n^{5/4}\frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = \frac{\ln(n)}{n^{1/4}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par croissance comparée. Donc

$$\frac{\ln(n)}{n^{3/2}} = o\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right),$$

et, par critère de négligeabilité (pour les séries à termes positifs), la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^{3/2}}$ converge.

(iv) Cette série n'est pas à termes positifs. On regarde donc son éventuelle convergence absolue. Mais,

$$\left|\frac{(-1)^n}{n(n+1)}\right| = \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$$

et par critère d'équivalence (en comparaison à *LA* série de Riemann convergente), la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ converge absolument et donc simplement.

(2) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.
On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue.

Il est nécessaire ici d'introduire les évènements R_k "on obtient une boule rouge au $k-$ième tirage".

(a) Si on a une rouge, on rajoute une rouge dans l'urne. Connaissant les tirages qui ont précédés, on connait donc parfaitement la composition de l'urne et on peut calculer la probabilité d'avoir à nouveau une rouge, ou une bleue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
P(Y=n) &= P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{n-1} R_k\right) \cap \overline{R}_n\right) \\
&= P(R_1)P_{R_1}(R_2) \times \cdots \times P_{\bigcap_{k=1}^{n-2} R_k}(R_{n-1})P_{\bigcap_{k=1}^{n-1} R_k}(\overline{R}_n) \qquad \text{(formule des proba. composées)} \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \cdots \times \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{n+2} \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}, \qquad \text{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

(b) On sait que

$$\begin{aligned}
Y \text{ admet une espérance} &\iff \sum nP(Y=n) \text{ converge (absolument)} \\
&\iff \sum \frac{2n}{(n+1)(n+2)} \text{converge}
\end{aligned}$$

Or,

$$\frac{2n}{(n+1)(n+2)} \sim \frac{2}{n}$$

et la série $\sum 1/n$ diverge (série harmonique), donc par critère d'équivalence, $\sum nP(Y=n)$ diverge et Y n'admet pas d'espérance et *a fortiori* pas de variance non plus.
À titre d'exercice, on suggère de répondre aux même questions avec la variable Z correspondant au rang d'obtention de la première boule rouge. Ces questions proviennent du sujet **EML 2017**.

Exercice 1

On considère une variable aléatoire X suivant une loi géométrique de paramètre p. Le but de l'exercice est de montrer que $Y = 1/X$ admet une espérance et de préciser sa valeur.

(1) On connait la loi de X. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$. Par le théorème de transfert, on a aussi

$$Y = \frac{1}{X} \text{ admet une espérance } \iff \sum \frac{1}{k}P(X=k) \text{ converge (absolument)} \iff \sum \frac{p(1-p)^{k-1}}{k} \text{ converge.}$$

(2) Soient $x \in [0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En regardant la formule attendue, on voit d'une part une intégrale entre 0 et x (qui fait penser à la *primitive* de la fonction à l'intérieur qui s'annule en 0) et dans le terme de gauche x^k/k s'interprète aussi comme une primitive, celle de x^{k-1}. En remarquant donc que

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}\mathrm{d}t,$$

on peut donc écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\int_0^x t^{k-1}\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}t^{k-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^x\left(\sum_{j=0}^{n-1}t^j\right)\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\frac{1-t^n}{1-t}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{(somme géométrique)} \\
&= \int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t} - \int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \\
&= [-\ln(1-t)]_0^x - \int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \\
&= -\ln(1-x) - \int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue. Ce calcul est très classique et à savoir refaire.

(3) Comme $x \in [0;1[$, on a $1-x>0$ et pour $t\in[0;x]$, on a $1-t \geq 1-x$ et donc

$$0 \leq \frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x},$$

puis, par positivité de t^n,

$$0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-x}.$$

Par positivité de l'intégrale (car les bornes sont dans l'ordre croissant), on a

$$0 \leq \int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^x\frac{t^n}{1-x}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{1-x}\times\frac{x^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{1-x}\times\frac{1}{n+1},$$

car $x<1$ donc $x^{n+1}\leq 1$. Or, comme

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{n+1} = 0,$$

le théorème des gendarmes permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t = 0.$$

(4) En revenant à ce qui précède, la somme partielle de terme général x^k/k admet une limite et la série converge. Plus précisément, on obtient même

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k} = \lim_{n\to+\infty}\left(-\ln(1-x) - \int_0^x\frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t\right) = -\ln(1-x).$$

En particulier, pour $x = 1-p \in [0;1[$, on a bien convergence de la série correspondant à l'espérance de Y, et on peut même écrire

$$E(Y) = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k} = -\frac{p}{1-p}\ln(1-(1-p)) = -\frac{p\ln(p)}{1-p}.$$

Exercice 2 : L'ascenseur

Un immeuble de p étages est équipé d'un ascenseur. N personnes montent dans l'ascenseur au rez de chaussée et descendent chacune à un étage au hasard et de façon indépendante.
Soit X le nombre d'arrêts de l'ascenseur.
On note X_i la variable valant 1 si l'ascenseur s'arrête à l'étage i et 0 sinon et on note E_k la variable aléatoire qui prend la valeur de l'étage où descend la $k-$ième personne.

(1) Chaque personne choisit au hasard un étape. Le numéro de l'étage choisi par la personne numéro k est donc une variable aléatoire uniforme sur $[\![1;p]\!]$ ou encore

$$E_k \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;p]\!]).$$

(2) L'évènement $(X_i = 0)$ signifie que que personne ne descend à l'étage i, ce qui veut dire que **chacune** des k personnes choisit un des $p-1$ autres étages. Ceci donne, par indépendance des variables E_k,

$$P(X_i = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[E_k \neq i]\right) = \prod_{k=1}^{N} P(E_k \neq i) = \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{p-1}{p}\right) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N.$$

(3) X compte le nombre d'arrêts de l'ascenseur, c'est donc le total de variables qui prennent la valeur 1 lorsque l'ascenseur marque l'arrêt, soit le total des X_i, donc

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_p.$$

Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_p).$$

Or, X_i suit une binomiale de paramètre

$$P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N,$$

et il suit que

$$E(X) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right).$$

(4) C'est le même raisonnement qu'à la Question (2). En effet, $[X_i = 0 \cap X_j = 0]$ signifie que personne ne descend ni à l'étage i ni à l'étage i, chaque personne choisit donc son étage parmi les $p-2$ restant. On a donc

$$P(X_i = 0 \cap X_j = 0) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[E_k \in [\![1;p]\!] \setminus \{i,j\}]\right) = \left(\frac{p-2}{p}\right)^N = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^N.$$

On observe que, comme $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0, 1\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_iX_j = 0) &= P(X_i = 0 \cup X_j = 0) \\ &= P(X_i = 0) + P(X_j = 0) - P(X_i = 0 \cap X_j = 0) \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{p}\right)^N - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N. \end{aligned}$$

(5) Cette question mérite son étoile. On a montré précédemment que $X = X_1 + ... + X_p$. Ici, les variables (X_i) ne sont pas indépendantes donc, il faut appliquer la formule de la variance d'une somme avec les covariances qui généralise la formule de la variance de la somme. Ici, on l'admet. Certains sujets (comme **HEC 2018** proposent de la démontrer).

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + ... + X_p) = \sum_{i=1}^{p} V(X_i) + 2\sum_{1 \leq i < j \leq p} \operatorname{cov}(X_i, X_i).$$

On connait les valeurs de $V(X_i)$ qui valent toutes (car X_i Bernoulli)

$$V(X_i) = \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^N$$

C'est maintenant que ça devient rigolo.

$$\operatorname{cov}(X_i, X_i) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j).$$

Or, étant que clair que X_iX_j est encore une Bernoulli (c'est une variable qui vaut 0 ou 1), on a

$$E(X_iX_j) = P(X_iX_j = 1) = 1 - P(X_iX_j = 0) = 1 - \left(1 - \frac{2}{p}\right)^N.$$

Il suit que

$$\operatorname{cov}(X_i, X_i) = 1 - \left(1 - \frac{2}{p}\right)^N - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)^2$$

Il y a $p(p-1)/2$ couples (i,j) tels que $1 \leq i < j \leq p$ (petit exercice). Au final,

$$V(X) = p\left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^N - p(p-1)\left(1 - \left(1 - \frac{2}{p}\right)^N - \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^N\right)^2\right).$$

On pourrait sûrement simplifier mais on va s'arrêter là. Si tant est qu'on y soit arrivé.

Exercice 3

Cet exercice est la première partie du sujet Math 2 **ESSEC 2016**. On renvoie à ce lien pour la solution.

Bonus - Des soirées qui comptent

On propose trois exercices de dénombrement, pour le plaisir.

Premier exercice : la soirée de Noël

On cherche à organiser une soirée de Noël. Le service traiteur retenu nous propose, afin d'élaborer un menu, de choisir les plats qui seront proposés aux convives parmi tout un panel de bonnes choses. Plus précisément, on veut créer un menu composé d'une entrée à choisir parmi 2, d'un plat à choisir parmi 3 et d'un dessert. Le traiteur propose une liste comprenant 8 entrées, 10 plats et 6 desserts.

(1) Il faut donc pouvoir proposer 2 entrées (on choisit donc 2 entrées parmi 8), 3 plats (on choisit parmi 10) et 1 dessert (choisi parmi 6). Il y a donc

$$\binom{8}{2} \times \binom{10}{3} \times \binom{6}{1} = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{10 \times 9 \times 8}{6} \times 6 = 20160$$

possibilités de menus.

(2) On va plutôt compter les menus qui ne proposent pas d'alternative végétarienne pour chaque étape du dîner et les retrancher au nombre total d'options calculé à la question précédente. Il y a donc 4 entrées non végétariennes et 7 plats principaux. On a donc un total de

$$\binom{4}{2} \times \binom{7}{3} \times \binom{6}{1} = 1260$$

et donc $20160 - 1260 = 18900$ options qui présentent au moins une option végétarienne pour chaque étape du dîner.

Deuxième exercice : la soirée de Noël, suite

Notons S_n l'ensemble des tirages et s_n son cardinal.

(1) Associer une personne à une autre, sans répétition, de sorte que tout le monde soit tiré correspond à définir une bijection sur un ensemble à n éléments. On sait qu'il y en a $n!$. Ainsi, $s_n = n!$.

(2) Commençons par remarquer que si il y a n participants, dont le sympathique enseignant, il y a $n-1$ élèves qui ne mettent qu'un seul papier et l'enseignant qui en met p, l'urne contient alors $n - 1 + p$ papiers.

(a) On va tirer n papiers d'une urne qui en contient $n-1+p$ en tenant compte de l'ordre. Il y a donc
$$A_{n-1+p}^{n} = \frac{(n-1+p)!}{(p-1)!}$$
tirages différents avec cette petite variante bon enfant.

(b) Commençons par faire choisir l'enseignant. Il peut tirer p papiers le forçant à se faire un cadeau à lui même. Il reste ensuite $n-1$ étudiants qui doivent piocher parmi $n+p-2$ papiers, ce qui se fait de A_{n+p-2}^{n-1} façons. Au total, il y a
$$p \times A_{n+p-2}^{n-1} = p \times \frac{(n+p-2)!}{(p-1)!}$$
façons pour l'enseignant de ne pas avoir dépenser d'argent pour un de ses élèves!

(c) Il faut naturellement que $p \leq n$ (ne soyons pas trop gourmand!). On va commencer par attribuer les p papiers de l'enseignant à p participants parmi les n. Il y a A_n^p de le faire. Ensuite, il faut que les $n-p$ participants restant choisissent un papier parmi les $n-1+p-p = n-1$ papiers restants, ce qui se fait de A_{n-1}^{n-p} façons. Au final, il y a
$$A_n^p \times A_{n-1}^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!}$$
tirages qui rendront cet enseignant satisfait. Espérons que les élèves ne remarquent rien!

Troisième exercice : la soirée déguisée

On appelle S_n^p le nombre de tirages pour lesquels tous les personnages seront présents à la soirée.

(1) S'il y a davantage de petits papiers que d'étudiants et qu'ils n'en prennent chacun qu'un, il n'est pas possible de tous les tirer. Ainsi $S_n^p = 0$ si $p > n$. Si par contre $p = n$, cela impose que chaque étudiant doit tirer un papier différent (sinon ils ne seront pas tous tirés). Ainsi, on doit associer à chacun des n étudiants un papier parmi n de manière *bijective*, le nombre de telles associations est exactement le nombre de permutations d'un ensemble à n élements, soit $S_n^n = n!$.

(2) S'il n'y a qu'un petit papier dans le sac, tout le monde pioche le même (et tout le monde sera déguisé pareil, ce qui pourrait finalement s'avérer plutôt rigolo). Il n'y a donc qu'un seul tirage, $S_n^1 = 1$.

(3) Il y a deux papiers dans l'urne. On veut qu'ils soient tous les deux tirés au moins une fois. Cela veut dire qu'on peut avoir k étudiant tirant le premier papier et $n-k$ tirant le second, pour toutes les valeurs de k comprises entre 1 et $n-1$. Pour chaque valeur de k, il faut déterminer lesquels des étudiants tirent ce premier papier,c'est à dire qu'il faut choisir k étudiants parmi n, et il y a $\binom{n}{k}$ choix. Au final,
$$S_n^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 2 = 2^n - 2.$$

(4) Il y a $n+1$ étudiants dans le groupe. On en sélectionne un. Celui-ci a p choix possibles pour le papier qu'il va tirer dans le sac. Pour chacun de ces choix, il faut compter le nombre de choix pour le reste du groupe. Il reste n étudiants qui doivent piocher. Il y a maintenant deux alternatives. Ou bien le déguisement tiré par le premier étudiant est choisi à nouveau et on a donc S_n^p tirages possibles pour les n étudiants, ou bien ce déguisement n'est plus tiré, ce qui laisse S_n^{p-1} choix. En combinant les deux alternatives, on a bien compté tous les tirages pour lesquels tous les déguisements étaient piochés au moins une fois. On obtient bien
$$S_{n+1}^p = p\left(S_n^p + S_n^{p-1}\right).$$

(5) On cherche à montrer, à l'aide d'une récurrence sur $n \geq 1$, que, pour tout $p \geq 1$,

$$(\star) \qquad S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n.$$

(a) On suppose que $n = 1$ et $p = 1$. On a précédemment calculé $S_1^1 = 1$. D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k = (-1) \binom{1}{0} \times 0 + (-1)^0 \binom{1}{1} \times 1 = 1,$$

et l'initialisation est bien vérifiée dans ce cas particulier.

(b) On commence par constater que la somme à considérer pourrait débuter à $k = 1$ sans que cela ne change rien. De plus, La Question (6) de l'Exercice 1. nous permet de voir que $k \times \binom{p}{k} = p \times \binom{p-1}{k-1}$. Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = p \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p-1}{k-1}.$$

En réindexant par $j = k - 1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k = p \sum_{j=0}^{p-1} (-1)^{p-1-j} \binom{p-1}{j} = 0$$

d'après la Question (5) de l'Exercice 1. Or comme $S_1^p = 0$ si $p > 1$, l'initialisation est bien vérifiée dans ce cas-ci également.

(c) On suppose que l'égalité $(\star)$ est vérifiée pour une certaine valeur de $n \geq 1$ et pour tout $p \geq 1$.

(i) Si $p = 1$, on a encore $S_{n+1} = 1$ et

$$\sum_{k=0}^{1} (-1)^{1-k} \binom{1}{k} k^{n+1} = (-1)^0 \times \binom{1}{1} \times 1^n = 1,$$

et la récurrence est bien vérifiée dans ce cas très particulier.

(ii) Montrons que la récurrence est encore vérifiée si $p > 1$. On commence par utiliser la relation établie à la Question (5) puis l'hypothèse de récurrence=

$$\begin{aligned}
S_{n+1}^p &= p(S_n^p + S_n^{p-1}) && \text{(d'après la Question (5))} \\
&= p\left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} k^n + \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^{p-1-k} \binom{p-1}{k} k^n\right) && \text{(d'après HR)} \\
&= p\left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} k^n \left(\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k}\right)\right) && \text{(en factorisant)} \\
&= p\left(\sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} k^n \binom{p-1}{k-1}\right) && \text{(d'après le triangle de Pascal)} \\
&= \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k} k^{n+1} \binom{p}{k} && \left(\text{car } p\binom{p-1}{k-1} = k\binom{p}{k}\right),
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'égalité attendue. La récurrence est ainsi démontrée.