ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°5

Cahier de travail des vacances de Noël
À rendre le 03/01

Questions de cours.

Avant d'attaquer les exercices qui suivent, on vérifiera savoir répondre sans l'aide du cours aux points de la liste suivante.

(1) Lois discrètes usuelles et leur contexte expérimental.
(2) Définition et propriétés de la loi exponentielle, de la loi uniforme sur $[a; b]$.
(3) Définition de deux matrices semblables.
(4) Définition et propriétés de la covariance de deux variables discrètes.
(5) Fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$.
(6) Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
(7) Définition de la dimension d'un sous-espace vectoriel.
(8) Chaîne d'équivalence liant automorphisme, noyau, rang et inversibilité d'une matrice.
(9) Donner des critères de convergences des séries à termes positifs.
(10) Définition de l'indépendance de deux v.a. discrètes. Lien entre indépendance et covariance.
(11) Critères de convergence d'une intégrale impropre.
(12) Écrire sous forme d'intégrale la probabilité qu'une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite appartienne à un segment $[a, b]$.
(13) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue sur I. Propriétés de $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 1

(1) Soit X une variable aléatoire à densité. On note g une densité de X et G sa fonction de répartition. On suppose que g vérifie les propriétés suivantes:

   (i) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (ii) g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
   (iii) g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Montrer alors que l'équation $G(x) = 1/2$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$, notée m.
   Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé *médiane* de X.

(2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) En utilisant une propriété de la loi exponentielle de paramètre 1, montrer que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

puis en déduire que f est une densité de probabilité. Retrouver le résultat à l'aide d'une IPP. On note X une variable aléatoire dont une densité f.

(b) Montrer que la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1-(1+x)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(c) Montrer que X admet une médiane m puis montrer, sans chercher à la calculer, que m vérifie $1 \leq m \leq 2$.
On donne : $0,3 < e^{-1} < 0,4$ *et* $0,1 < e^{-2} < 0,15$.

Exercice 2

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}, \qquad h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

(1) Justifier que les fonctions f_n et h sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier leur signe.

(2) Montrer la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$.

On calculera explicitement la valeur de la première et on notera K la valeur de la deuxième qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement.

(3) (a) Montrer, à l'aide du changement de variable $x = 1/u$, que $\displaystyle\int_0^1 h(u)\mathrm{d}u$ converge et vaut $-K$.

(b) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |h(x)|\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $2K$.

(c) En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ et préciser sa valeur.

(4) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant |h(x)|$. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $h(x) - f_n(x) = \dfrac{h(x)}{n+1+nx^2}$.

(c) En déduire successivement

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{n+1},$$

puis que

$$-\frac{K}{n+1} \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(d) Montrer enfin que
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 3

Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & b\end{pmatrix}$.

(1) Dans cette question, on choisit $a=b=-1$.
 (a) La matrice M est-elle inversible? Déterminer une base de son noyau puis son rang.
 (b) Calculer pour tout entier $n\geq 2$, la matrice M^n.

(2) Dans cette question, on choisit $a=b$.
 (a) La matrice M est-elle inversible? Déterminer une base de son noyau puis son rang.
 (b) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, on a $M^n=(1+a)^{n-1}M$.

(3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a\neq b$.

(4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0<p<1$. On pose : $q=1-p$.
Soit A l'événement : "la matrice N est inversible" où N est la matrice aléatoire définie par
$$N=\begin{pmatrix}1 & X\\ 1 & Y\end{pmatrix}.$$
 (a) Établir la relation
$$P([X=Y])=\sum_{k=1}^{+\infty}P([X=k])\times P([Y=k]).$$
 (b) Calculer
$$\sum_{k=1}^{+\infty}p^2q^{2k-2}.$$
 (c) En déduire $P(A)$ en fonction de q

Exercice 4 - `SciLab` super facile

Une équipe d'archéologues travaille sur des ossements d'un même specimen de dinosaure, retrouvés sur différents sites, au quatre coins du monde. Afin de mieux comprendre l'anatomie de ce sympathique animal, ils procèdent aux mesures de la longueur (en cm) de leur humérus (dont les résultats sont noté x_i) et de leur fémur (notés y_i).

Le but est d'obtenir une relation affine entre la longueur de l'humérus et celui du fémur de ce dinosaure.

(1) Recopier dans `SciNotes` les données ci-dessous des séries statistiques (x_i) et (y_i).

```
x=[440, 710, 870, 650, 750, 535, 395]
y=[400, 590, 770, 600, 650, 475, 355]
```

(2) Quelles commandes permettent d'obtenir les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des deux séries statistiques? Préciser le résultat que renvoie `SciLab` à l'exécution de ces commandes.
(3) Représenter le nuage de points, ainsi que le point moyen (en le différenciant). On joindra la figure et précisera les commandes.
(4) À la vue du nuage de points, peut-on anticiper une valeur du coefficient de corrélation linéaire (empirique) de x et y plutôt proche de 1, de 0 ou de -1?
(5) Calculer explicitement sous `SciLab` la valeur de ce coefficient. On précisera les commandes. Est-il alors raisonnable de proposer un modèle de régression linéaire?
(6) Déterminer l'équation de la droite de régression de y en x. La représenter graphiquement sur la même figure (en rouge) que celle qui contient le nuage de point.
(7) On retrouve en plein Mexique, juste à côté d'un moustique fossilisé dans de l'ambre, un fémur de ce même dinosaure de longueur 515 cm. L'humérus est manquant. Quelle devrait être sa longueur, selon ce modèle?

Problème

Pour toutes suites numérique $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$, on définit[1] la suite $u \star v = w$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}.$$

Partie I: Exemples et premiers résultats

(1) Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

$$(i)\ u_n = 2 \text{ et } v_n = 3, \qquad (ii)\ u_n = 2^n \text{ et } v_n = 3^n, , \qquad (iii)\ u_n = \frac{2^n}{n!} \text{ et } v_n = \frac{3^n}{n!}.$$

(2) Écrire un programme en `SciLab` qui demande à l'utilisateur une valeur de l'entier naturel n, qui calcule et affiche les valeurs $w_0,\ w_1,\ \dots,\ w_n$, où les suites u et v sont définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \ln(n+1) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{n+1}.$$

(3) Dans cette question, la suite u est définie par:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.
(a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité:

$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n.$$

(b) Soit n un entier strictement supérieur à 1. Prouver les inégalités:

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n \quad \text{et} \quad w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$$

(c) En déduire que les deux suites (w_{2n}) et (w_{2n+1}) convergent vers 0 ainsi que la suite (w_n).

[1] Cette opération, à titre purement informatif, s'appelle le *produit de convolution (discret)* des suites u et v

(d) Soit u' la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' \star v$ est convergente et de limite nulle.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

(1) Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A et qu'une suite strictement croissante ne peut appartenir à A.

(2) Soit $z = (z_n)$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

(a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad z_n = \alpha + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

(b) En déduire qu'il existe des suites appartenant à A et non monotones.

(3) Soit $a = (a_n)$ un élément de A et b la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

On définit alors la suite c par $c_0 = a_0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}.$$

(a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

(b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

Que peut-on en déduire pour les suites $b \star c$ et a?

(c) Soit ε la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \varepsilon_n = c_n - \ell$$

et d la suite $b \star \varepsilon$.

En utilisant un résultat de la Partie I, montrer que la suite d converge vers 0.

(d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.

Partie III : Application aux variables aléatoires

(1) **Résultats préliminaires**.

(a) On considère deux distributions de probabilités $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ (que l'on associe respectivement à deux variables aléatoires X et Y supposées **indépendantes**). Montrer que la loi de $X + Y$ est donnée par $u \star v$.

(b) Retrouver alors le résultat de la question $(1) - (iii)$ de la Partie I par un choix adéquat des lois de X et de Y.

(c) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que la variable aléatoire 2^{-Z} admet une espérance et que celle-ci vaut

$$\mathrm{E}\left(2^{-Z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P([Z = n]) \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

On note $r(Z)$ cette espérance.

(d) Que peut-on dire des variables aléatoires 2^{-X} et 2^{-Y}?
En déduire l'égalité

$$r(X + Y) = r(X)r(Y).$$

(e) On considère une suite (X_n) de v.a.i.i.d[2], à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Pour tout entier naturel non nul q, on désigne par S_q la variable aléatoire définie par

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

Établir l'égalité

$$r(S_q) = (r(X_1))^q .$$

(2) **Une formule sommatoire**.

(a) Montrer que la suite $u = (u_n)$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^{-n-1}$, est une distribution de probabilité. On note Z une variable aléatoire telle que $P(Z = n) = u_n$. Calculer alors le nombre $r(Z)$.

(b) On suppose que (X_n) est une suite de v.a.i.i.d de même loi que Z et, pour tout entier naturel non nul q, on désigne encore par S_q la variable

$$S_q = \sum_{i=1}^{q} X_i.$$

En admettant[3], pour tout entier naturel non nul q, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k+q}{q} = \binom{n+q+1}{q+1},$$

montrer par récurrence que la loi de S_q est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P([S_q = n]) = \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+q} .$$

(c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer le nombre $r(S_q)$ et en déduire la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+q-1}{q-1} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^q .$$

---

[2] variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées

[3] Égalité classique que l'on rencontre dans pléthore de sujets et qu'il faut savoir démontrer

(3) **Un exemple concret**.

On admet, dans cette question, que la variable aléatoire Z définie précédemment représente le nombre de petits devant naître en 2022 d'un couple de kangourous.

Chaque petit kangourou a la même probabilité 1/2 d'être mâle ou femelle, indépendamment des autres.

On note F la variable aléatoire égale au nombre de femelles devant naître en 2022.

(a) Préciser, pour tout entier naturel n, la loi conditionnelle de F sachant $[Z = n]$.

(b) À l'aide de la formule obtenue en 2c, montrer que la loi de F est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P([F = n]) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(c) Justifier l'existence des espérances $E(Z)$ et $E(F)$ des variables aléatoires Z et F, puis vérifier l'égalité $E(Z) = 2\,\mathrm{E}(F)$.

Exercice*

Une population d'individus doit faire face à une pandémie. Après plusieurs mois de confinement un vaccin est proposé.

Ayant conscience de l'existence d'adeptes de théorie du complot et autres croyances archaïques du même genre, un organisme interroge 100 personnes pour savoir si oui ou non la personne interrogée a l'intention de se faire vacciner:

- 70 personnes affirment que oui;
- 30 personnes affirment que non.

L'enquête est publiée et relayée par les différents médias. Un nouveau sondage est effectué : un échantillon de 100 personnes sélectionnées au hasard est interrogé, et le résultat précédemment publié *influence parfaitement* la population dont 30% penche maintenant contre la vaccination et 70% en faveur de celle-ci!

On recommence le tirage au hasard de 100 personnes, et ainsi de suite. On se demande alors ce qui se passe avec un grand nombre de sondages. Le problème modélisé ci-dessous essaie de répondre à cette question.

Soit donc N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k_0 \in [\![0, N]\!]$. On note alors $p = \frac{k_0}{N}$ et on introduit la suite de variables aléatoires (X_n) définie par

- X_0 est la variable aléatoire certaine égale à k_0;
- X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, k_0)$;
- Sachant $[X_n = k]$ (avec $k \in [\![0; N]\!]$), X_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{k}{N}\right)$.

On s'intéresse notamment à l'évolution de la probabilité que *personne* ne se fasse vacciner, à savoir $P(X_n = 0)$.

On note

$$u_n = P(X_n = 0) + P(X_n = N), \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 - u_n.$$

(1) Montrer que, pour tout $i \in [\![0; N]\!]$,
$$P(X_{n+1} = i) = \sum_{k=0}^{N} \left(\binom{N}{i} \left(\frac{k}{N}\right)^i \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} P(X_n = k) \right).$$
(2) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(X_{n+1}) = E(X_n)$.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$E(X_{n+1}(N - X_{n+1})) = \frac{N-1}{N} E(X_n(N - X_n)).$$
(4) En déduire la valeur de $E(X_n(N - X_n))$ en fonction de n, N et k_0.

(5) Montrer que (u_n) est croissante et convergente.

(6) (a) Étudier sur $[1, N-1]$, la fonction $f : x \mapsto x(N - x)$. Préciser notamment son minimum.

(b) Utiliser la question précédente pour montrer que
$$E(X_n(N - X_n)) \geq (N-1)v_n$$
puis obtenir
$$0 \leq v_n \leq \frac{k_0}{N}\left(1 - \frac{k_0}{N}\right) \frac{N^2}{N-1} \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n.$$
(c) En déduire la limite de v_n lorsque $n \to +\infty$.

(7) Déduire de la question précédente que, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$,
$$\lim_{n \to +\infty} P(X_n = k) = 0.$$
(8) Montrer alors, à l'aide la Question (2), que
$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = N) = \frac{k_0}{N}, \qquad \lim_{n\to+\infty} P(X_N = 0) = 1 - \frac{k_0}{N}.$$
(9) On introduit maintenant une nouvelle variable aléatoire T définie comme suit.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq X_n \leq N-1$, alors $T = 0$;
- Sinon
$$T = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\}.$$

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $P(T = n) = v_{n-1} - v_n$.

(b) En déduire que $P(T = 0) = 0$.

(c) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} kP(T = k) = \sum_{k=1}^{n-1} v_k - nv_n.$$
(d) En déduire que T admet une espérance (qu'on ne cherchera pas à calculer) et que
$$E(T) \leq \frac{k_0}{N}\left(1 - \frac{k_0}{N}\right) \frac{N^3}{N-1}.$$