ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°5

Cahier de travail des vacances de Noël
Solution

Exercice 1

(1) Soit X une variable aléatoire à densité. On note g une densité de X et G sa fonction de répartition. On suppose que g vérifie les propriétés suivantes:

(i) g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(ii) g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
(iii) g est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On rappelle qu'on a, comme g est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \qquad G(x) = 0, \qquad \text{et}, \forall x \geq 0, \quad G(x) = \int_0^x g(t)\mathrm{d}t.$$

En particulier, g étant continue, G est la primitive de g qui s'annule en 0. On a alors $G'(x) = g(x) > 0$ sur $]0;+\infty[$ ce qui fait de G une fonction (continue et) strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Par le théorème de bijection, G réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]G(0), \lim_{+\infty} G(x)[=]0;1[$ (car G est une fonction de répartition).
En particulier, $1/2 \in]0;1[$, admet donc un unique antécédent, que l'on note m, par G sur $]0;+\infty[$.
Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé *médiane* de X.

(2) (a) Sachant que si Z désigne une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1, celle-ci admet une espérance, et comme sa densité est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = E(Z) = 1.$$

Ainsi, on voit que la fonction f ci-dessus vérifie les conditions pour être une densité de probabilité (elle est continue, y compris en 0, partout sur $\mathbb{R}$, soit comme fonction constante soit comme produit de fonctions usuelles continues, elle est clairement positive ou nulle partout et son intégrale sur $]-\infty;+\infty[$ qui se ramène à celle sur $[0;+\infty[$ car f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, vaut 1 d'après l'observation ci-dessus. De plus, les trois conditions de la Question 1 sont clairement satisfaites.

(b) On rappelle que F est donnée par

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t.$$

Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, il est clair que $F(x) = 0$ si $x < 0$. Soit $x \geq 0$. En posant

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & e^{-t} \\ v(t) & = & t \end{array} \right. \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} u(t) & = & -e^{-t} \\ v'(t) & = & 1 \end{array} \right.$$

on définit deux fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[0; x]$. Par intégration par parties, on a

$$\int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t = \left[-te^{-t}\right]_0^x + \int_0^x e^{-t}\mathrm{d}t = -xe^{-x} + [-e^{-t}]_0^x = 1 - (1+x)e^{-x},$$

ce qui donne bien

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1+x)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

(c) On a

$$F(1) = 1 - 2e^{-1} \qquad \text{donc} \qquad F(1) < 0,4 < \frac{1}{2} = F(m)$$

et

$$F(2) = 1 - 3e^{-2} \qquad \text{donc} \qquad F(2) > 0,55 > \frac{1}{2} = F(m)$$

Par stricte croissance de F sur $]0; +\infty[$ (et donc de sa bijection réciproque), on a bien

$$1 \leq m \leq 2.$$

Exercice 2

On considère, pour n entier naturel non nul, les fonctions f_n et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \frac{n\ln(x)}{n+1+nx^2}, \qquad h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}.$$

(1) f_n et h sont deux quotients de fonctions usuelles continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas, ainsi ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, ces dénominateurs sont strictement positifs donc le signe est donné par le numérateur, (comme $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire par le signe de $\ln(x)$. Ainsi, on a le tableau de signe ci-dessous

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(2) (a) L'intégrale est impropre en $+\infty$. Soit $A \geq 1$. On procède par intégration par parties en posant

$$u'(x) = \frac{1}{x^2}, \qquad u(x) = -\frac{1}{x}$$

$$v(x) = \ln(x), \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Les fonctions u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $[1;+\infty[$ rendant l'IPP licite. Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_1^A \frac{\ln(x)}{x^2}\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln(x)}{x}\right]_1^A + \int_1^A \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^A \\ &= -\frac{\ln(A)}{A} - \frac{1}{A} + 1 \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{(par croissance comparée).}\end{aligned}$$

(b) Cette intégrale est également impropre en $+\infty$. On constate que, pour tout $x \geq 1$,

$$0 \leq h(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2} \leq \frac{\ln(x)}{x^2}$$

Ainsi, par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, on peut conclure que

$$\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$$

converge. On note K sa valeur.

(3) (a) L'intégrale est impropre en 0 (le ln() n'y est pas défini hein). Soit donc $\varepsilon > 0$. On pose

$$u = u(x) = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{u}$$

La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon;1]$ et y est bijective rendant le changement de variable licite. De plus,

$$\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x \iff \mathrm{d}u = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \iff \mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 h(x)\mathrm{d}x &= \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= -\int_{1/\varepsilon}^1 \frac{\ln\left(\frac{1}{u}\right)}{u^2\left(1+\frac{1}{u^2}\right)}\mathrm{d}u \\ &= -\int_1^{1/\varepsilon} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\mathrm{d}u \\ &\underset{\epsilon\to0^+}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u = K\end{aligned}$$

(b) D'après l'étude du signe de la fonction h à la toute première question, on peut écrire que

$$|h(x)| = \begin{cases} -h(x), & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ h(x), & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Comme les deux intégrales $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ convergent, la relation de Chasles nous permet d'affirmer que $\int_0^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_0^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x = \int_0^1 |h(x)|\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x = -\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = -(-K)+K = 2K.$$

(c) L'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$ converge absolument (d'après la question précédente). Elle est donc, par un résultat du cours, également convergente. Et on a

$$\int_0^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = -K+K = 0.$$

(4) (a) Commençons par voir que, pour tout $x > 0$,

$$1 + nx^2 + n = n(1 + x^2) + 1 \geq n(1 + x^2) \quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{1 + nx^2 + n} \leq \frac{n}{n(1 + x^2)} \leq \frac{1}{1 + x^2}.$$

Maintenant,

- Pour $0 < x \leq 1$, $\ln(x) \leq 0$ donc
$$\frac{n}{n + 1 + nx^2} \times \ln(x) \geq \frac{\ln(x)}{1 + x^2}$$
ou encore
$$-f_n(x) \leq -h(x).$$
- Pour $x \geq 1$, $\ln(x) \geq 0$ donc
$$\frac{n}{n + 1 + nx^2} \times \ln(x) \leq \frac{\ln(x)}{1 + x^2}$$
ou encore
$$f_n(x) \leq h(x).$$

Connaissant - par la toute première question - les signes de $f_n(x)$ et $h(x)$, on peut donc bien déduire que, pour tout $x > 0$,

$$|f_n(x)| \leq |h(x)|.$$

Par critère de comparaison des intégrales de fonctions positives (comme $\int_0^{+\infty} |h(x)|\mathrm{d}x$ converge), on peut conclure que $\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\mathrm{d}x$ converge, c'est à dire que $\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

(b) Soit $x > 0$,

$$\begin{aligned} h(x) - f_n(x) &= h(x) - h(x) \times \frac{n(1 + x^2)}{n + nx^2 + 1} \\ &= h(x)\left(1 - \frac{n(1 + x^2)}{n + nx^2 + 1}\right) \\ &= h(x) \times \frac{n + nx^2 + 1 - n - nx^2}{n + nx^2 + 1} \\ &= \frac{h(x)}{n + nx^2 + 1}. \end{aligned}$$

(c) Pour $x \geq 1$, on a donc - sachant que $h(x) \geq 0$

$$0 \leq h(x) - f_n(x) = \frac{h(x)}{n + nx^2 + 1} \leq \frac{h(x)}{n + 1}$$

ce qui donne, par positivité de l'intégrale, comparaison et convergence de $\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x$,

$$0 \leq \int_1^{+\infty} (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leq \int_1^{+\infty} \frac{h(x)}{n + 1}\mathrm{d}x = \frac{K}{n + 1}.$$

D'autre part, pour $0 < x \leq 1$, comme $h(x) \leq 0$, on a

$$\frac{h(x)}{n + 1} \leq \frac{h(x)}{n + nx^2 + 1} = h(x) - f_n(x) \leq 0,$$

et, toujours par positivité de l'intégrale, comparaison, et convergence de $\int_0^1 h(x)\mathrm{d}x$ (vers $-K$)

$$-\frac{K}{n + 1} \quad \leqslant \int_0^1 (h(x) - f_n(x))\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

(d) On commence par voir que, par linéarité de l'intégrale - toutes les intégrales étant ici convergentes d'après ce qui précède -

$$\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 (f_n(x) - h(x))\mathrm{d}x.$$

Or, par le théorème des gendarmes, le deuxième terme du membre de droite tend vers 0, lorsque n tend vers $+\infty$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = -K.$$

De même,

$$\int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} (f_n - h(x))(x)\mathrm{d}x$$

et pour la même raison,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x = K.$$

Au final, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x = -K + K = 0.$$

Exercice 3

Cet exercice provient du sujet **ESCP 2015**, série T.

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

(1) Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.

(a) Dans tout l'exercice, on va utiliser la caractérisation de l'inversibilité par le *déterminant*. On pourrait naturellement raisonner autrement. Ici,

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right) = 0,$$

ainsi, la matrice M n'est pas inversible. De plus,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) \quad &\Longleftrightarrow \quad MX = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x - y &=& 0 \\ x - y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En particulier, le noyau de M est de dimension 1 (il est engendré par un vecteur non nul). Par le théorème du rang, on peut conclure que $\mathrm{rg}(M) = 2 - 1 = 1$.

(b) On constate que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et, par un récurrence immédiate, $M^n = 0$ pour tout $n \geq 2$.

(2) Dans cette question, on choisit $a = b$.

(a) Comme précédemment, on trouve un déterminant nul, donc la matrice n'est pas inversible. De plus,

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M) &\iff MX = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + ay &=& 0 \\ x + ay &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En particulier, le noyau de M est de dimension 1 (il est engendré par un vecteur non nul). Par le théorème du rang, on peut conclure que $\mathrm{rg}(M) = 2 - 1 = 1$.

(b) Commençons par observer que

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a)M,$$

ce qui initialise la récurrence (pour $n = 2$) prouvant la formule demandée. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, celle-ci est vraie, alors

$$M^{n+1} = M^n M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1}(1+a)M = (1+a)^n M,$$

et on a bien la formule au rang $n + 1$, ce qui termine la récurrence et démontre la formule demandée.

(3) On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
On utilise encore la caractérisation de l'inversibilité par le déterminant:

$$\begin{aligned} M \text{ inversible} &\iff \det(M) \neq 0 \\ &\iff \det\left(\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \right) \neq 0 \\ &\iff b - a \neq 0 \\ &\iff a \neq b. \end{aligned}$$

(4) Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose : $q = 1 - p$.
Soit A l'événement : "la matrice N est inversible" où N est la matrice aléatoire définie par

$$N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}.$$

(a) D'après la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{(X = n) : \ n \in \mathbb{N}^*\}$, on a

$$\begin{aligned} P([X = Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([X = Y] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n] \cap [X = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n])P([X = n]) \qquad \text{(par indépendance de } X \text{ et } Y) \end{aligned}$$

(b) On reconnait une somme de série géométrique, de raison q^2

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^2\right)^{k-1} = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^n = \frac{p^2}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2}{(1-q)(1+q)} = \frac{1-q}{1+q}$$

(c) D'après les questions précédentes, N est inversible si et seulement si $X \neq Y$. Or, en combinant les deux questions précédentes, on trouve

$$\begin{aligned} P([X = Y]) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([Y = n])P([X = n]) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(pq^{n-1}\right)^2 \qquad \text{(car } X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi } \mathcal{G}(p)) \\ &= \frac{1-q}{1+q}. \end{aligned}$$

Il suit que

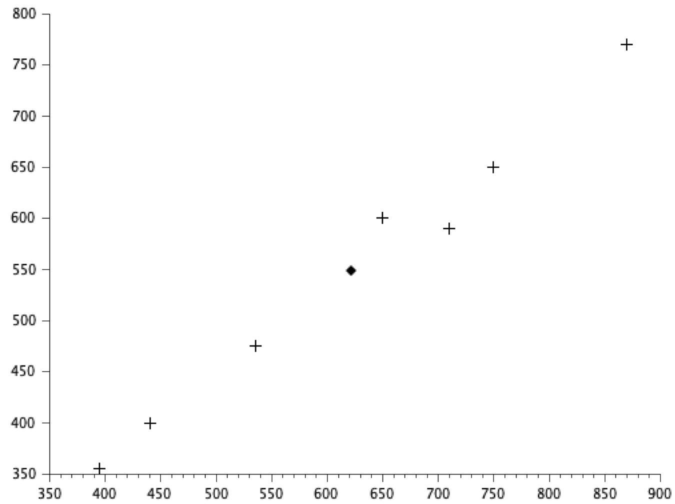
$$P(A) = 1 - P(X = Y) = 1 - \frac{1-q}{1+q} = \frac{2q}{1+q}.$$

Exercice 4 - `SciLab` super facile

(2) Les commandes `mean(x)` et `mean(y)` permettent d'obtenir les moyennes $\overline{x}$ et $\overline{y}$ des deux séries statistiques x et y. Leur exécution renvoie respectivement `621.42857` et `548.57143`.

(3) On sait faire

```
plot2d(x,y,-1)
plot2d(mean(x), mean(y), -4)
```



(4) On semble observer une tendance assez nette : les points sont presque alignes sur une droite au coefficient directeur positif (fonction affine croissante). D'après le cours, le coefficient de corrélation linéaire devrait être proche de 1.

(5) Il y a plusieurs façons de calculer ce coefficient, selon comment on calcule la covariance. On propose la méthode la plus courte.

```
rho=corr(x,y,1)/sqrt(corr(x,x,1)*corr(y,y,1))
```

Ceci renvoie `0.9919271`, valeur très proche de 1 qui confirme donc que le modèle de régression linéaire est raisonnable.

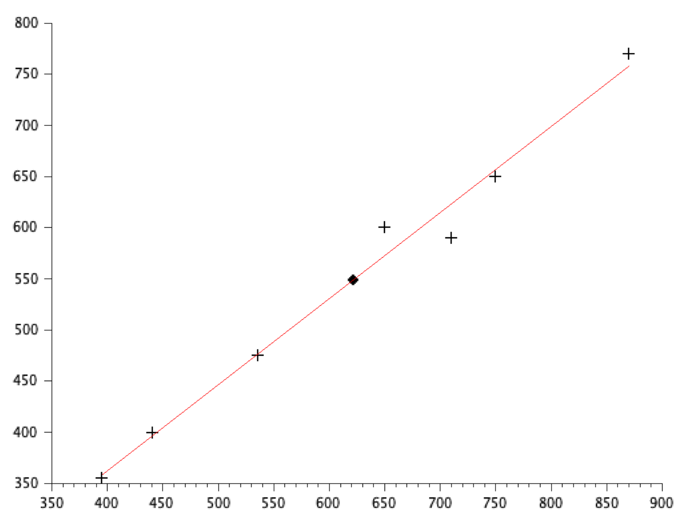
(6) L'équation de la droite de régression de y en x est

$$y = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}x + E(Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{V(X)}E(X)$$

on ajoute alors les commandes

```
a=corr(x,y,1)/corr(x,x,1)
b=mean(y)-a*mean(x)
plot2d(x, a*x+b, style=5)
```

pour afficher



(7) Il y a un piège, ici on a besoin de l'équation de la droite de régression de x en y. On obtient la valeur voulue avec l'instruction

```
c=corr(x,y,1)/corr(y,y,1)
d=mean(x)-c*mean(y)
c*515+d
```

ce qui donne une longueur d'humérus autour de `582` cm.

Problème

Cet intéressant problème reprend un sujet **ESCP 2002**.
Une solution est disponible sur le site de Pierre Veuillez, et plus précisément ici.

Néanmoins, on propose une solution de la question `SciLab`:

(3) Comme $u_0 = \ln(1) = 0$, on a $w_0 = 0$.

```
n=input('n=?')
w=0
for k=1:n
   w=[w, log(k+1)/(n+1-k)]
end
w=cumsum(w)
disp(w)
```

Exercice*

Cet exercice est inspiré d'un vieil exercice du sujet **HEC 1997**.

Soit donc N un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k_0 \in [\![0, N]\!]$. On note alors $p = \frac{k_0}{N}$ et on introduit la suite de variables aléatoires (X_n) définie par

- X_0 est la variable aléatoire certaine égale à k_0;
- X_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N, k_0)$;
- Sachant $[X_n = k]$ (avec $k \in [\![0; N]\!]$), X_{n+1} suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(N, \frac{k}{N}\right)$.

On note

$$u_n = P(X_n = 0) + P(X_n = N), \qquad \text{et} \qquad v_n = 1 - u_n.$$

(1) Commençons par expliciter la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $[X_n = k]$. On a

$$P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i) = \binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i}.$$

D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X_n = k] : \ 0 \leq k \leq N\}$, on a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = i) &= \sum_{k=0}^{N} P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = i)P(X_n = k) \\ &= \sum_{k=0}^{N}\left(\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{N-i} P(X_n = k)\right) \end{aligned}$$

(2) On utilise la formule précédente et une permuation de sommes. En effet,

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{i=0}^{N} iP(X_{n+1}=i) = \sum_{i=0}^{N} i\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}P(X_n=k)\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{i=0}^{N} i\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}
\end{aligned}$$

or, on sait - d'après le cours - que, si $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{k}{N}\right)$, alors

$$E(Z) = \sum_{i=0}^{N} i\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i} = N\times\frac{k}{N} = k,$$

donc

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{i=0}^{N} i\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)k\\
&= E(X_n).
\end{aligned}$$

En particulier, la suite $(E(X_n))$ est constante et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$E(X_n) = E(X_0) = k_0.$$

(3) C'est la même méthode, avec le théorème de transfert. Ce dernier permet en effet d'écrire que

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) &= \sum_{i=0}^{N} i(N-i)P(X_{n+1}=i)\\
&= \sum_{i=0}^{N} i(N-i)\left(\sum_{k=0}^{N}\left(\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}P(X_n=k)\right)\right)\\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{i=0}^{N} i(N-i)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{i=1}^{N-1} i(N-i)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}
\end{aligned}$$

Or,

$$(N-i)\binom{N}{i} = (N-i)\binom{N}{N-i} = N\binom{N-1}{N-i-1} = N\binom{N-1}{i}$$

puis

$$i\binom{N-1}{i} = (N-1)\binom{N-2}{i-1}.$$

Au final,

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}(N-X_{n+1})) &= \sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{i=1}^{N-1} i(N-i)\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\\
&= N(N-1)\sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{i=1}^{N-1}\binom{N-2}{i-1}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i}\\
&= N(N-1)\sum_{k=0}^{N} P(X_n=k)\sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^{j+1}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-2-j+1}\\
&= N(N-1)\sum_{k=0}^{N}\frac{k}{N}\times\frac{N-k}{N}P(X_n=k)\sum_{j=0}^{N-2}\binom{N-2}{j}\left(\frac{k}{N}\right)^{j}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-2-j}\\
&= \frac{N(N-1)}{N^2}\sum_{k=0}^{N}k(N-k)P(X_n=k) \qquad \text{(par formule du binôme)}\\
&= \frac{N-1}{N}E(X_n(N-X_n)) \qquad \text{(par théorème de transfert).}
\end{aligned}$$

(4) La suite $(E(X_n(N-X_n)))$ est alors géométrique de raison $(N-1)/N$. On en déduit aisément que

$$E(X_n(N-X_n)) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n E(X_0(N-X_0)) = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n k_0(N-k_0).$$

(5) Comme (u_n) est clairement bornée (par 2 car chaque terme est la somme de deux probabilités), le théorème de convergence monotone affirme qu'il suffit de montrer que la suite est croissante pour qu'elle converge. Mais comme

$$P(X_{n+1}=0) = \sum_{k=0}^{N}\left(1-\frac{k}{N}\right)^N P(X_n=k) \geq P(X_n=0)$$

et

$$P(X_{n+1}=N) = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{k}{N}\right)^N P(X_n=k) \geq P(X_n=N)$$

donc on a bien $u_{n+1} \geq u_n$.

(6) (a) Étudier sur $[1, N-1]$, L a fonction $f:\ x \mapsto x(N-x)$ est polynomiale, dérivable partout. La dérivée vaut $f'(x) = N-x-x = N-2x$ qui s'annule en changeant de signe (de positif à négatif) en $x = N/2$ où f est donc maximale. Comme de plus $f(1) = f(N-1) = N-1$, on peut déduire que, pour tout $x \in [1, N-1]$,

$$N-1 \leq x(N-x) \leq \frac{N^2}{4}.$$

(b) Observons pour commencer que

$$v_n = 1 - P(X_n=0) - P(X_n=N) = P(1 \leq X_n \leq N-1) \geq 0.$$

Mais alors

$$\begin{aligned} E(X_n(N-X_n) &= \sum_{k=0}^{N} k(N-k)P(X_n=k) = \sum_{k=1}^{N} k(N-k)P(X_n=k) \\ &\geq \sum_{k=1}^{N-1} (N-1)P(X_n=k) \qquad \text{(d'après (a))} \\ &= (N-1)\sum_{k=1}^{N-1} P(X_n=k) = (N-1)v_n \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} v_n &\leq \frac{E(X_n(N-X_n))}{N-1} \\ &= \frac{1}{N-1}\left(\frac{N-1}{N}\right)^n k_0(N-k_0) \\ &= \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \end{aligned}$$

comme attendu.

(7) On observe que

$$\left|1-\frac{1}{N}\right| < 1 \Longrightarrow \left(1-\frac{1}{N}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = 0.$$

Or, pour tout $k \in [\![1; N-1]\!]$

$$0 \leq P(X_n=k) \leq \sum_{k=1}^{N-1} P(X_n=k) = v_n.$$

Par théorème des gendarmes, on a bien

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=k) = 0.$$

(8) Commençons par voir (à l'aide de la Question (2) que

$$k_0 = E(X_n) = \sum_{k=0}^{N} kP(X_n=k) = NP(X_n=N) + \sum_{k=1}^{N} kP(X_n=k).$$

D'après la question précédente, il est alors clair que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} kP(X_n=k) = 0$$

ce qui donne donc que

$$\lim_{n\to+\infty} NP(X_n=N) = k_0$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty} P(X_n=N) = \frac{k_0}{N}.$$

Comme $v_n \to 0$ et que $u_n = 1 - v_n$, on a $u_n \to 1$. Au final,

$$P(X_n=0) = u_n - P(X_n=N) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 - \frac{k_0}{N}.$$

(9) On introduit maintenant une nouvelle variable aléatoire T définie comme suit.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 \leq X_n \leq N-1$, alors $T = 0$;
- Sinon
$$T = \min\{n \in \mathbb{N}^* : X_n = 0 \text{ ou } X_n = N\}.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est très important d'avoir à l'esprit que, si $X_k = 0$ alors nécessairement $X_j = 0$ pour tout $j \geq k$ et même chose pour l'autre extrémité; si $X_k = N$ alors $X_j = N$ pour tout $j \geq k$. Il suit que
$$[X_k \notin \{0, N\}] \Longrightarrow \forall j \leq k, \quad [X_j \notin \{0, N\}]$$
ou encore
$$\bigcap_{j=0}^{k} [X_j \notin \{0, N\}] = [X_k \notin \{0, N\}].$$
La relation à trouver fait penser à une relation que l'on utilise souvent et qu'on commence par écrire
$$P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n).$$
Mais, $[T > n-1]$ signifie que les $n-1$ premières valeurs de X_j étaient différentes de 0 ou de N, c'est à dire que
$$[T > n-1] = \bigcap_{j=0}^{n-1} [X_j \notin \{0, N\}] = [X_{n-1} \notin \{0, N\}]$$
et
$$P(T = n) = P(T > n-1) - P(T > n) = v_{n-1} - v_n.$$

(b) On calcule ensuite une somme télescopique
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(T = k) &= \sum_{k=1}^{n} (v_{k-1} - v_k) \\ &= v_0 - v_n \\ &\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v_0 = 1 \end{aligned}$$
En particulier
$$P(T = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T = k) = 1 - 1 = 0.$$

(c) Cette question ressemble à des questions déjà rencontrées. On renvoie notamment à ce <u>chouette Problème</u> ou à <u>celui-ci</u> (Exercice 3). On remplace:
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} kP(T = k) &= \sum_{k=1}^{n} k(v_{k-1} - v_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} kv_{k-1} - \sum_{k=1}^{n} kv_k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)v_j - \sum_{k=1}^{n} kv_k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} jv_j + \sum_{j=0}^{n-1} v_j - \sum_{k=1}^{n} kv_k \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} v_j - nv_n \end{aligned}$$

(d) En utilisant une majoration de v_j obtenue précédemment, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP(T=k) &= \sum_{j=0}^{n-1} v_j - nv_n \leq \sum_{j=0}^{n-1} v_j \\
&\leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^2}{N-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^j \\
&= \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^2}{N-1}\sum_{j=0}^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \\
&= \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^2}{N-1}\frac{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n}{1/N} \\
&= \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^3}{N-1}\left(1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right) \\
&\leq \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^3}{N-1}.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (croissante) des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{n} kP(T=k)\right)_n$ est majorée (par une constante) et donc convergente ou encore la série de terme général $kP(T=k)$ converge, ce qui garantit l'existence de $E(T)$. On a bien

$$E(T) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} kP(T=k) \leq \frac{k_0}{N}\left(1-\frac{k_0}{N}\right)\frac{N^3}{N-1}.$$