ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison n°6

À rendre le 01/02

Exercice 1 ft. `SciLab`

(1) Indiquer l'allure du graphe de la **fonction de de répartition** de la loi normale centrée-réduite.

(2) La fonction `SciLab` `cdfnor()` permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque. En voici deux exemples d'utilisation

```
cdfnor("PQ", 1.96, 0, 1)
    --->0.9750021
```

```
cdfnor("X",  0, 1, 0.975, 0.25)
    --->1.959964
```

(a) **Expliquer** (et préciser le résultat) ce que permettent d'obtenir les trois commandes suivantes

```
cdfnor("PQ",  0, 0, 1)
cdfnor("X",  0, 1, 0.5, 0.5)
cdfnor("X",  0, 1, 0.025, 0.975)
```

(b) Quelle commande permet d'obtenir, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(2,4)$, un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$P(X \leq x) \geq 0.95?$$

(3) Soient $B \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $X = ZB$.

(a) À l'aide de la fonction de répartition Φ de Z, exprimer la fonction de répartition F_X de X.

(b) Que vaut $P(X < 1.96)$? *On donnera une valeur approchée obtenue avec* `SciLab`.

(c) Écrire un script qui permet de simuler 1000 variables indépendantes de même loi que X et qui renvoie la fréquence des simulations inférieures à 1.96. Interpréter.

Problème 1

Partie I : une relation classique et utile

Dans toute cette partie, on considère une matrice supposée diagonalisable $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que si λ est valeur propre de A, alors λ est solution de l'équation

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0.$$

(2) En déduire que, si λ_1 et λ_2 sont les deux valeurs propres de A (avec la possibilité que $\lambda_1 = \lambda_2$), on a

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

(3) Montrer alors, par identification de polynômes, que

$$\left\{\begin{array}{rcl}\lambda_1+\lambda_2 &=& a+d\\ \lambda_1\lambda_2 &=& ad-bc\end{array}\right.$$

Partie II : un problème d'optimisation

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B,N)=120B-8B^2+4BN-2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

(4) Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(5) Montrer que f ne peut présenter un extremum qu'en un seul point de $\mathbb{R}^2$. Former la matrice hessienne de f en ce point.

(6) En utilisant la Question (3) de la Partie I, montrer que f présente bien un extremum local au point précédent. préciser sa nature et sa valeur.

(7) Développer

$$-2(y-x)^2-6(x-10)^2.$$

Que peut-on en conclure à propos de l'extremum précédent?

(8) Si on suppose de plus qu'une contrainte de budget impose $B+2N=23$, déterminer l'optimum de rendement.

Partie III : Une autre fonction de 2 variables

On considère l'application $F:U=\left]1;+\infty\right[^2\to\mathbb{R}$, définie, pour tout $(x,y)\in\left]0;+\infty\right[^2$ par :

$$F\left(x,y\right)=\frac{\ln\left(x\right)}{y}+\frac{\ln\left(y\right)}{x}$$

(9) Représenter graphiquement U.

(10) Justifier que F est de classe C^2 sur l'ouvert U.

(11) Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $U=\left]0;+\infty\right[^2$.

(12) On introduit la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\varphi(t)=\left\{\begin{array}{rl}t^2\ln(t), & \text{si } t>0\\ 0, & \text{si } t=0\end{array}\right.$$

- (a) Montrer que φ est continue sur $[0;+\infty[$.
- (b) Montrer que φ est dérivable en 0 et préciser $\varphi'(0)$. En déduire que φ est dérivable sur $[0;+\infty[$.
- (c) Montrer φ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle à préciser.

(13) Montrer que $(x,y)\in U$ est un point critique de F si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rcl}\varphi(x) &=& \varphi(y)\\ \dfrac{1}{xy} &=& \dfrac{\ln(x)}{y^2}\end{array}\right.$$

(14) En déduire que (e,e) est le seul point critique un point critique de F sur U.

(15) Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de U.

(16) Utiliser la Question (3) de la Partie I pour déterminer la nature du point critique précédent. En déduire que F ne présente pas d'extremum (local ou global) sur U.

(17) Qu'en est-il si on considère F sur $\overline{U}=[1;+\infty[\times[1;+\infty[$? (*On pourra évaluer F en* $(1,1)$.)

Problème 2

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante

- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

Partie I - Étude du mouvement du jeton A

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 0 si à l'issue de la $n-$ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_0 et 1 si il est dans la case C_1.
Naturellement, $X_0 = Y_0 = 0$.

(1) On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
  (a) Justifier que M est diagonalisable.
  (b) Déterminer les valeurs propres de M et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
  (c) En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) (a) Déterminer la loi de X_1.
  (b) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer ensuite une matrice Q telle que
$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$
  (c) Expliciter Q^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
  (d) En déduire la loi de X_n.

Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On considère maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0 = 1$ et, à l'issue de la $n-$ième expérience décrite précédemment.

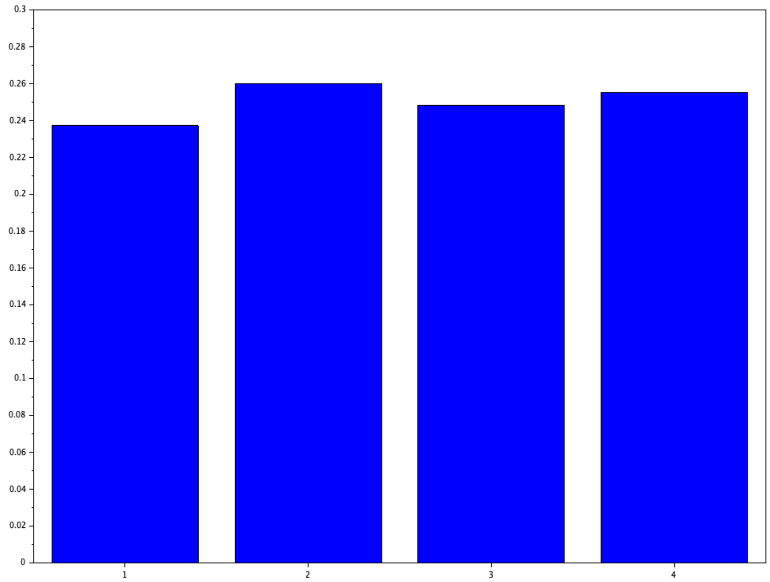
- Si A et B sont tous deux dans C_0, alors $W_n = 1$;
- Si A se trouve dans C_0 et B dans C_1, alors $W_n = 2$;
- Si A se trouve dans C_1 et B dans C_0, alors $W_n = 3$;
- Si A et B sont tous deux dans C_1, $W_n = 4$.

(4) Déterminer la loi de W_1.
(5) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1} = 1) \\ P(W_{n+1} = 2) \\ P(W_{n+1} = 3) \\ P(W_{n+1} = 4) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} P(W_n = 1) \\ P(W_n = 2) \\ P(W_n = 3) \\ P(W_n = 4) \end{pmatrix}.$$
(6) Montrer que 1 est valeur propre de A. Déterminer un vecteur propre de A, associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1.
(7) Compléter la fonction `SciLab` pour qu'elle renvoie uniquement une simulation de W_n

```
function y=W(n)
A=[...........................]/3;
W=grand(n, 'markov', A', 1);
y=...........................
endfunction
```

(8) On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous

```
S=zeros(1, 1000)
for k=1:1000
    S(k)=W(500)
end
T=tabul(S, 'i')
bar(T(:,1), T(:,2)/1000)
```



Interpréter ce résultat. Quel est le lien avec la Question 6?