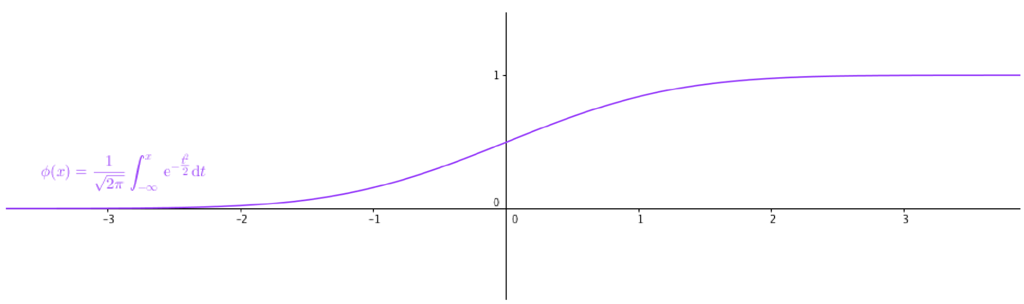
ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison n°6

Solution

Exercice 1 ft. `SciLab`

(1) On sait qu'il s'agit d'une fonction croissante, de classe $\mathcal{C}^1$, de limite nulle en $-\infty$, de limite 1 en $+\infty$ et qui vaut $1/2$ en 0. Une observation rapide permet aussi de constater qu'elle est convexe sur $]-\infty;0[$ et concave sur $]0;+\infty[$, avec un seul point d'inflexion en 0. Tout cela nous permet de faire un joli dessin



(2) La fonction `SciLab` `cdfnor()` permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque. En voici deux exemples d'utilisation

```
cdfnor("PQ", 1.96, 0, 1)
    --->0.9750021
```

```
cdfnor("X",  0, 1, 0.975, 0.025)
    --->1.959964
```

(a) La première commande va donc renvoyer $P(X \leq 0) = \Phi(0)$, où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, représenté ci-dessous. Comme on l'a rappelé, la valeur correspondante que va afficher `SciLab` est alors $1/2$. Lorsque le premier argument de `cdfnor()` est `"PQ"`, la commande renvoie donc la probabilité $p = P(X \leq x)$ (en fait elle peut aussi renvoyer $q = 1-p$).
En mettant `"X"` en premier argument, la commande renvoie des valeurs de Φ^{-1}. La seconde instruction va renvoyer $\Phi^{-1}(0.5)$, à savoir 0, comme on vient de le dire ci-avant. Enfin, la troisième commande renvoie, selon le même fonctionnement, $\Phi^{-1}(0.025)$. Sachant que $\Phi(1.959964) = P(X \leq 1.959964) = 0.975$, $P(X > 1.959964) = P(X \leq -1.959964) = 0.025$ et donc la dernière commande renvoie -1.959964.

(b) On comprend, avec la description de la commande `cdfnor()` précédente que l'on obtient la quantité souhaitée en tapant `cdfnor("X", 2, 2, 0.95, 0.05)`. Cette quantité vaut 5.2897073.

(3) Soient $B \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$ et $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ deux variables aléatoires indépendantes. On pose $X = ZB$.

(a) On utilise la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{(B=0),(B=1)\}$.

$$\begin{array}{rcll} F_X(x) & = & P(X \leq x) = P(ZB \leq x) & \\ & = & P(ZB \leq x \cap B = 0) + P(ZB \leq x \cap B = 1) & \\ & = & P(x \geq 0 \cap B = 0) + P(Z \leq x \cap B = 1) & \\ & = & P(x \geq 0)P(B=0) + P(Z \leq x)P(B=1) & \text{par indépendance} \\ & = & \dfrac{1}{2}\left(P(x \geq 0) + F_Z(x)\right) & \\ & = & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\Phi(x), & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(\Phi(x)+1\right), & \text{si } x \geq 0 \end{array} \right. & \end{array}$$

(b) D'après le calcul précédent, $P(X \leq 1.96)$ vaut $\frac{1}{2}(\Phi(1.96)+1)$. La commande `SciLab` renvoie

```
(1/2)*(cdfnor("PQ", 1.96, 0, 1)+1)
--->0.9875011
```

(c) On utilise `grand()` et des opérations pointées

```
S=grand(1, 1000, 'nor', 0,1).*grand(1, 1000, 'bin', 1, 0.5)
f=length(find(S<=1.96))/1000
```

et `SciLab` renvoie `--> 0.988`, valeur empirique très proche de la valeur théorique 0.9875011 ci-dessus. Tout est cohérent!

Problème 1

Partie I : une relation classique et utile

Dans toute cette partie, on considère une matrice supposée diagonalisable $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

(1) Par définition,

$$\begin{array}{rcl} \lambda \text{ valeur propre de } M & \Longleftrightarrow & M - \lambda I \text{ non inversible} \\ & \Longleftrightarrow & \det(M - \lambda - I) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \end{array}$$

Donc les valeurs propres de M sont les racines du polynôme

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

(2) Si a est racine d'un polynôme P, on sait que $X - a$ divise P. Or, λ_1 et λ_2 sont valeur propres donc solutions de l'équation précédente et racines du polynôme correspondant. Par factorisation, on a donc

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (a+d)x + ad - bc.$$

On aura observé que le coefficient constant devant $(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$ car le polynôme à droite est *unitaire*, son coefficient de plus haut degré vaut 1.

(3) Par développement, on a

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x - \lambda_1\lambda_2.$$

Ainsi, par identification de polynômes, on a bien

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 & = & ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & a + d \end{array} \right.$$

Partie II : un problème d'optimisation

Un agriculteur souhaite améliorer le rendement de son exploitation en utilisant de l'engrais. Une étude a montré que le rendement, en tonnes par hectare, pour la variété de blé cultivée est donnée par

$$f(B,N) = 120B - 8B^2 + 4BN - 2N^2$$

B désigne la quantité de semences de blé utilisée, N la quantité d'engrais utilisée.

(4) Pour une notation plus habituelle, écrivons $f(x,y) = 120x - 8x^2 + 4xy - 2y^2$. C'est une fonction polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(5) La question revient à chercher les points critiques de f. On commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 1.

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 120 - 16x + 4y \\ \partial_2 f(x,y) &= 4x - 4y \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique de } f &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 16x - 4y &=& 120 \\ 4x - 4y &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 4x - y &=& 30 \\ x - y &=& 0 \end{array}\right. \\ &\iff x = y = 10 \end{aligned}$$

Ainsi f n'admet qu'un seul point critique, de coordonnées $(10,10)$ et si f présente un extremum c'est nécessairement en ce point. Pour former la matrice hessienne de f, on commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x,y) &= -16 \\ \partial^2_{1,2} f(x,y) &= 4 \\ &= \partial^2_{2,1} f(x,y) \\ \partial^2_{2,2} f(x,y) &= -4 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\nabla^2 f(10,10) = \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(6) On utilise ici le résultat de la partie précédente [1] que si

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est une matrice diagonalisable de valeurs propres λ_1 et λ_2, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 &=& ad - bc \\ \lambda_1 + \lambda_2 &=& a + d \end{array}\right.$$

Notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de $M = \nabla^2 f(10,10)$ qui est bien diagonalisable (car symétrique), on a donc, d'après la remarque qui précède,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1\lambda_2 &=& 48 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &=& -20 \end{array}\right.$$

En particulier le produit des deux valeurs propres étant strictement positif, elles sont toutes deux de même signe, et leur somme étant négative, on peut affirmer que la hessienne admet donc

[1] qui est classique et apparait dans plusieurs sujets, mais qu'il faudra toujours savoir redémontrer

deux valeurs propres strictement négatives. Ainsi, f présente un maximum local en $(10,10)$. Ce maximum vaut
$$f(10,10) = 600.$$

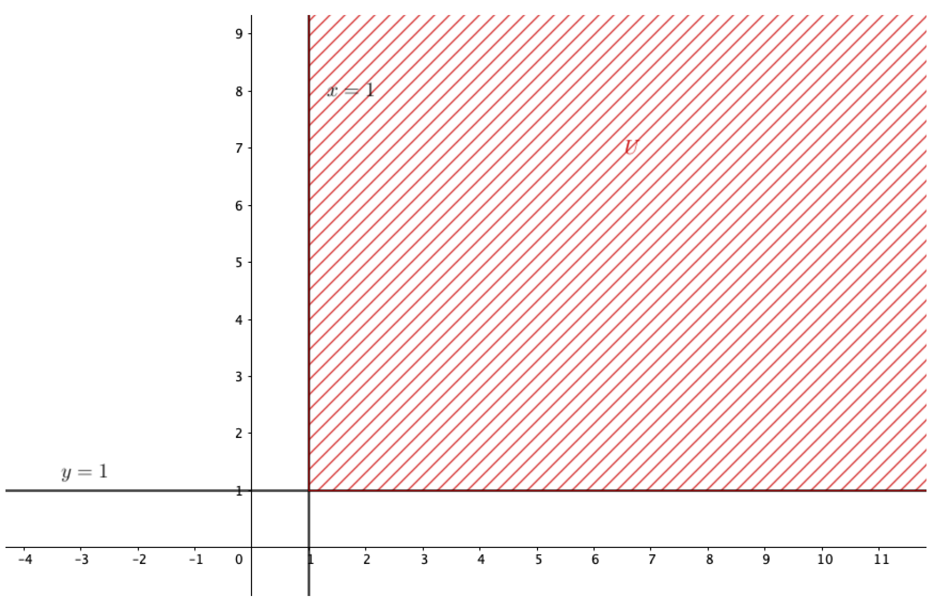
(7) On développe
$$\begin{aligned} -2(y-x)^2 - 6(x-10)^2 &= -2(y^2 - 2x + x^2) - 6(x^2 - 20x + 100) \\ &= -2y^2 + 4x - 2x^2 - 6x^2 + 120x - 600 \\ &= -600 + f(x,y) \\ &= -f(10,10) + f(x,y) \end{aligned}$$
Or, il est clair que (combinaison de carrés avec coefficients négatifs), pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x,y) - f(10,10) = -2(y-x)^2 - 6(x-10)^2 \leq 0$$
ou encore
$$f(x,y) \leq f(10,10).$$
Et le maximum local précédent est en fait un maximum global.

(8) Avec la contrainte $B + 2N = 23$, le rendement n'est plus qu'une fonction d'une seule variable
$$\begin{aligned} f(B,N) &= f(23-2N, N) \\ &= 120(23-2N) - 8(23-2N)^2 + 4(23-2N)N - 2N^2 \\ &= g(N) \end{aligned}$$
g est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a
$$g'(N) = -240 + 32(23-2N) + 4(-2N + 23 - 2N) - 4N = 12(3 \times 23 - 20 - 7N) = 84(7-N)$$
Ainsi, g admet un maximum en $N = 7$, donc sous la contrainte $B = 23 - 2N$, f présente un maximum en $(23 - 2 \times 7, 7) = (9,7)$ qui vaut $f(9,7) = 586$.

Partie III : Une autre fonction de 2 variables

On considère l'application $F : U =]1;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $(x,y) \in]1;+\infty[^2$ par :
$$F(x,y) = \frac{\ln(x)}{y} + \frac{\ln(y)}{x}$$

(9) Le domaine U correspond au *quart de plan* délimité par les droites (non incluses) d'équations $x = 1$ et $y = 1$.



(10) Les deux applications $(x,y) \mapsto x$ et $(x,y) \mapsto y$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur ($\mathbb{R}^2$ et donc sur) U comme fonctions polynomiales et sont à valeurs strictement positives. La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par compositions, les deux fonctions $(x,y) \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto \ln(y)$ sont bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Par quotients (avec des dénominateurs non nuls) puis par somme, la fonction F est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

(11) Les règles de calcul de dérivation partielle donnent

$$\begin{aligned} \partial_1 F(x,y) &= \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2} \\ \partial_2 F(x,y) &= \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2} \end{aligned}$$

(12) On introduit la fonction φ définie sur $[0;+\infty[$ par

$$\varphi(t) = \begin{cases} t^2\ln(t), & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

(a) Par croissance comparée,

$$\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} t^2 \ln(t) = 0 = \varphi(0)$$

donc φ est continue en 0. Sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est un produit de fonctions usuelles continues donc φ est continue. Au final, la fonction est bien continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Il faut déterminer la limite du taux d'accroissement en 0. On a

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} &= \frac{t^2\ln(t)}{t} = t\ln(t) \\ &\underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{(croissance comparée)} \end{aligned}$$

donc φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, φ est dérivable comme produit de fonctions usuelles dérivables. La fonction est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Pour $t > 0$, on a $\varphi'(t) = 2t\ln(t) + t^2(1/t) = t(2\ln(t) + 1)$. En particulier, si $t > 1$, $\varphi'(t) > 0$ ce qui veut dire que φ est strictement croissante sur $]1;+\infty[$. Étant continue sur ce même intervalle, le théorème de bijection permet d'affirmer que φ réalise une bijection de $]1;+\infty[$ sur $]\varphi(1); \lim_{+\infty}\varphi(t)[=]0;+\infty[$.

(13) Soit $(x,y) \in U$.

$$(x,y) \text{ est un point critique de } F \iff \nabla F(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{xy} - \frac{\ln(y)}{x^2} &= 0 \\ \frac{1}{xy} - \frac{\ln(x)}{y^2} &= 0 \end{cases}$$

$$\nabla F(x,y) = 0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(y)}{x^2} \\[2ex] \dfrac{\ln(y)}{x^2} & = & \dfrac{\ln(x)}{y^2} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(y)}{x^2} \\[2ex] y^2\ln(y) & = & x^2\ln(x) \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{xy} & = & \dfrac{\ln(y)}{x^2} \\[2ex] \varphi(x) & = & \varphi(y) \end{array}\right.$$

(14) Comme φ est bijective sur $]1;+\infty[$ et que x et y en sont des éléments (car $(x,y)\in U$), la deuxième ligne du système ci-dessus est équivalente à $x=y$. En substituant dans la première ligne, on obtient

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2} \iff \ln(x) = 1 \iff x = e.$$

Comme $y = x$, l'unique point critique de F sur U est le point de coordonnées (e,e).

(15) Le calcul donne

$$\begin{array}{rcll} \partial^2_{1,1}F(x,y) & = & -\dfrac{1}{yx^2} + \dfrac{2\ln(y)}{x^3} & \\[2ex] \partial^2_{1,2}F(x,y) & = & -\dfrac{1}{yx^2} - \dfrac{1}{xy^2} & \\[2ex] & = & \partial^2_{2,1}F(x,y) & \text{(lemme de Schwarz)} \\[2ex] \partial^2_{2,2}F(x,y) & = & -\dfrac{1}{yx^2} + \dfrac{2\ln(x)}{y^3} & \end{array}$$

(16) On forme alors la matrice Hessienne de F au point critique

$$H = \nabla^2 F(e,e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{e^3} & -\frac{2}{e^3} \\ -\frac{2}{e^3} & \frac{1}{e^3} \end{pmatrix}.$$

La matrice H étant symétrique, elle est diagonalisable. Notant λ_1 et λ_2 ses valeurs propres, le préambule de l'exercice permet d'obtenir en particulier que

$$\lambda_1\lambda_2 = -\frac{3}{e^3} < 0$$

Le produit des deux valeurs propres étant strictement négatif, ces deux valeurs propres sont de signes opposés et F présente donc un point selle en l'unique point critique qu'elle admet sur U. Il n'y a donc pas d'extremum (ni local et *a fortiori* par global non plus) sur U.

(17) Sur $\overline{U}$, on voit que $F(x,y) \geq 0$ (car $\ln(x) \geq 0$ et $\ln(y) \geq 0$ pour $x,y \geq 1$). Or, $F(1,1) = 0$ et $(1,1) \in \overline{U}$. Donc F présente un minimum global sur $\overline{U}$. En revanche, il n'y a pas de maximum global. Ce qu'on peut montrer en exhibant une direction avec une limite infinie, par exemple en constatant que

$$\lim_{x\to+\infty} F(x,1) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Problème 2

Exercice inspiré d'un vieux sujet **HEC Maths 3, 2000**, voie E.

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_0 et C_1, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_0. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante

- Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case;
- Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case;
- Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

Partie I - Étude du mouvement du jeton A

On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 0 si à l'issue de la $n-$ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_0 et 1 si il est dans la case C_1.
Naturellement, $X_0 = Y_0 = 0$.

(1) On introduit la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) La matrice M est symétrique donc diagonalisable, d'après le cours.

(b) On cherche les valeurs propres à l'aide du déterminant. Plus précisément,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M - \lambda I \text{ non inversible} \\
&\iff \det(M - \lambda I) = 0 \\
&\iff \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\
&\iff \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \\
&\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathrm{Sp}(M) = \{1; 3\}.$$

On cherche donc une base de vecteurs propres vers laquelle P sera la matrice de passage. Plus précisément, d'une part

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x + y = 0$$

Donc $E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.
D'autre part,

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff -x + y = 0$$

Donc $E_3 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Par concaténation, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ forme une base de $\mathcal{M}_{2,1}$ formée de vecteurs propres de M. La matrice P de passage, explicitée ci-après, de la base canonique vers cette nouvelle base est en particulier inversible. En posant

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

on a bien

$$M = PDP^{-1} \Longleftrightarrow P^{-1}MP = D$$

avec D diagonale.

(c) Une récurrence immédiate mène à

$$M^n = PD^nP^{-1}.$$

Or, un rapide pivot de Gauss donne

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} M^n &= PD^nP^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 3^n \\ -1 & 3^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 1+3^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) (a) On introduit les évènements A_i (resp. B_i, C_i) "on pioche la lettre a au $i-$ème tirage " (resp. "la lettre b", "la lettre c"). Il est clair que $X_1(\Omega) = \{0; 1\}$ et

$$P(X_1 = 1) = P(A_1) = \frac{1}{3}, \qquad P(X_1 = 0) = \frac{2}{3}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on admet raisonnablement que $\{(X_n = 0), (X_n = 1)\}$ est un système complet d'évènements. En lui appliquant la formule des probabilités totales, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) \\ &= \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{1}{3}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

car

$$P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = P(B_{n+1} \cup C_{n+1}) = \frac{2}{3}, \quad P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}.$$

Avec le même raisonnement, on obtient

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{3}P(X_n = 0) + \frac{2}{3}P(X_n = 1).$$

On peut donc écrire

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1} = 0) \\ P(X_{n+1} = 1) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix}.$$

Il suffit donc de prendre $Q = \frac{1}{3}M$, où M est la matrice étudiée précédemment.

(c) D'après ce qu'on a déjà calculé, on a

$$Q^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+3^n & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 1+3^n \end{pmatrix}.$$

(d) Comme $\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \end{pmatrix}$, une récurrence immédiate donne

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \end{pmatrix} = Q^n \begin{pmatrix} P(X_1=0) \\ P(X_1=1) \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+3^n & 3^n-1 \\ 3^n-1 & 1+3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

On en déduit donc

$$P(X_n=0) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^n}\right), \qquad P(X_n=1) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)$$

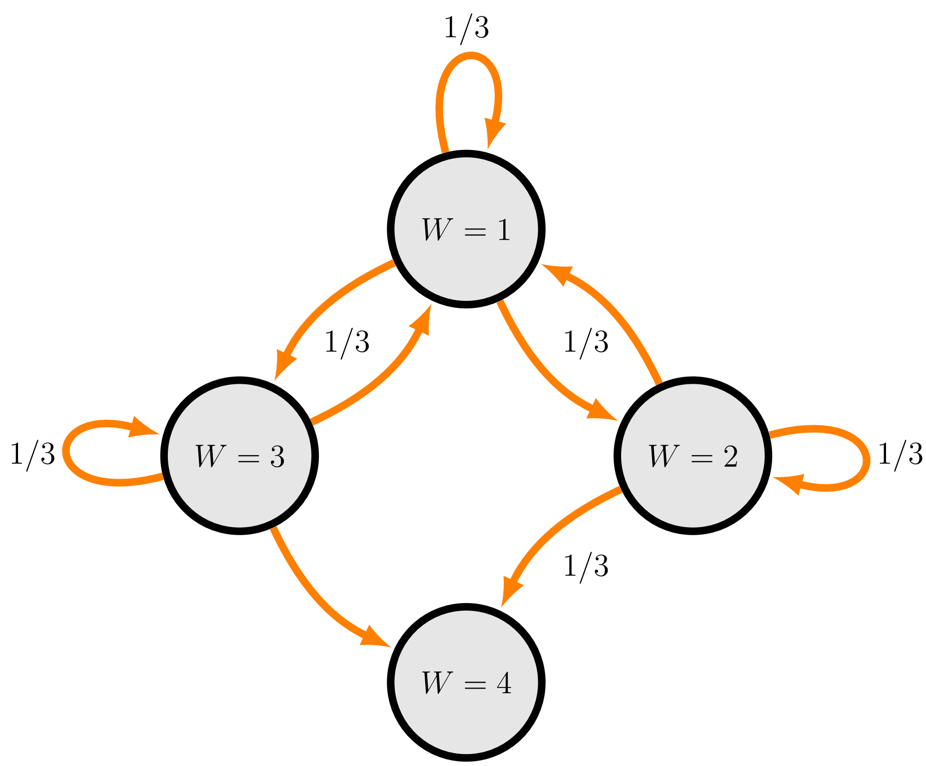
Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On considère maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0 = 1$ et, à l'issue de la $n-$ième expérience décrite précédemment.

- Si A et B sont tous deux dans C_0, alors $W_n = 1$;
- Si A se trouve dans C_0 et B dans C_1, alors $W_n = 2$;
- Si A se trouve dans C_1 et B dans C_0, alors $W_n = 3$;
- Si A et B sont tous deux dans C_1, $W_n = 4$.

On peut (et ce n'est nullement une nécessité mais c'est pratique), pour fixer les idées, commencer par dessiner le *diagramme de transition* de la *chaîne de Markov* (W_n).

Ici les probabilités sur chacune des arêtes sont les mêmes; elles valent toutes $1/3$. Chaque changement d'état correspond au tirage d'une lettre et une seule et ces tirages sont équiprobables.



(4) Partant de $W_0 = 1$, on voit que $W_1(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ et que ces trois états, correspondants à chacun des trois tirages possible pour la lettre, sont équiprobables. On a donc

$$P(W_1 = 1) = P(W_1 = 2) = P(W_1 = 3) = \frac{1}{3}.$$

(5) On peut admettre, car c'est un peu laborieux à démontrer, que $\{(W_n = i)\ i \in [\![1; 4]\!]\}$ forme un système complet d'évènements pour $n \geq 2$. En lui appliquant la formule des probabilités totales,

en tenant compte des probabilités de transition qui apparaissent dans le diagramme ci-dessus, on obtient

$$\begin{pmatrix} P(W_{n+1}=1) \\ P(W_{n+1}=2) \\ P(W_{n+1}=3) \\ P(W_{n+1}=4) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P(W_n=1) \\ P(W_n=2) \\ P(W_n=3) \\ P(W_n=4) \end{pmatrix}.$$

(6) C'est un simple calcul. En effet,

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ici, on a pensé à essayer le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1. On peut aussi voir que

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est clairement non inversible (deux couples de colonnes égales). En résolvant $AX = X$ on trouve une base de E_1 (qui sera de dimension 2 car le rang de la matrice $A - I$ ci-dessus est clairement égal à 2). Bref. Le vecteur précédemment exhibé ne satisfait pas à la condition demandée; on divise chacune de ces composantes par la somme de celles-ci. Ainsi,

$$\ell = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

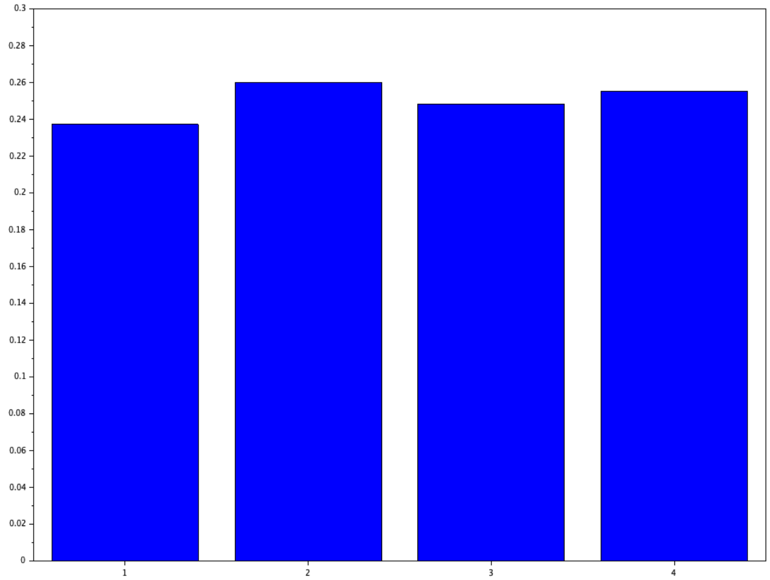
est vecteur propre *stochastique* (la somme de ses composantes vaut 1) de A, associé à la valeur propre 1.

(7) Il ne faut garder que la dernière composante du résultat de la commande `grand()` avec l'argument `'markov'`, sinon on a toute la *trajectoire* de la chaîne.

```
function y=W(n)
A=[1, 1, 1, 0; 1, 1, 0, 1; 1, 0, 1, 1; 0, 1, 1, 1]/3;
W=grand(n, 'markov', A', 1);
y=W(n)
endfunction
```

(8) On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous

```
S=zeros(1, 1000)
for k=1:1000
    S(k)=W(500) //on fait donc 1000 simulation de W_500
end
T=tabul(S, 'i') //on classe les valeurs obtenues
bar(T(:,1), T(:,2)/1000) //on représente le diagramme des fréquences
```



La représentation obtenue laisse conjecturer que W_{500} suit une loi uniforme sur $[\![1;4]\!]$, c'est à dire que pour n grand, chacun des quatre états semble équiprobable. Si la chaîne (W_n) *converge en loi* vers une *loi limite* dont le distribution est portée par le vecteur ℓ, la relation $W_{n+1} = AW_n$ *donne* $A\ell = \ell$ et ℓ est vecteur propre (stochastique - c'est une distribution de probabilité!) associé à la valeur propre 1, qu'on appelle aussi *état stationnaire.* C'est bien ce qu'on a trouvé à la question 6.