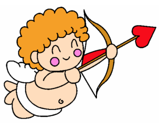
ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°8

À rendre par e-mail le 27/02

Exercice 1 (Facile)

On considère la fonction de deux variables G définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ par

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln(x) + y - \frac{3}{2}.$$

(1) Représenter graphiquement U.
(2) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.
(3) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de G en tout point $(x,y) \in U$.
(4) Montrer que G ne peut présenter d'extremum qu'en un seul point de U que l'on explicitera.
(5) La fonction G présente-elle un extremum au point précédent? Si oui, préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum et donner sa valeur. Est-il global?

Exercice 2 (Facile Facile)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et pour } n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{1 + u_n}.$$

(1) Introduire une fonction f qu'on étudiera brièvement telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
(2) Montrer que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
(3) Montrer que (u_n) est monotone.
(4) En déduire la convergence de (u_n) et préciser sa limite.

Problème 1

Soient λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ.

(1) Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.

(2) On considère une suite de variables aléatoires (X_i), indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ et on pose pour tout entier n non nul

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

(b) En déduire que S_n est un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{\lambda}$.

(3) Montrer que $E\left(\mathrm{e}^X\right)$ et $E\left(\mathrm{e}^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\frac{\lambda}{\lambda-2}$.

On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) Justifier que $Y(\Omega) = [1; +\infty[$.

(b) Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geq 1$.

(c) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
On dit que Y suit une loi de Pareto de paramètres λ et 1, notée $\mathcal{P}(\lambda, 1)$.

(5) (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si $k < \lambda$.
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.

(b) Calculer, à l'aide de la question 3, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.

On considère une suite de variables aléatoires (Y_i), indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ que Y (définie à la question 4c) et on pose pour tout entier n non nul : $Z_n = \min(Y_1, \ldots, Y_n)$.

(6) Simulation informatique.

(a) On rappelle qu'en `SciLab`, la commande `grand(1,1,'exp',1/m)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre m.
Écrire une fonction d'entête `function Y = Pareto(lambda)` qui permet de simuler la variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda, 1)$ suivant une loi de Pareto de paramètres `lambda` et 1.

(b) Compléter la fonction suivante pour qu'elle permette de simuler la variable Z_n.

```
function Z = Simu_Z(lambda,n)
    Y = Pareto(lambda)
    Z = Y
    for i = ............. do
        Y = Pareto(lambda)
        if ............. then
            Z = .............
        end
    end
endfunction
```

(c) On considère le script donné en annexe ainsi que les graphiques associés.
A partir des graphiques obtenus, conjecturer la loi suivie par la variable Z_n.

(7) (a) Soit $t \geq 1$. Montrer que : $P(Z_n > t) = t^{-\lambda n}$.

(b) En déduire la fonction de répartition de Z_n puis vérifier que Z_n suit également une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.

On considère encore une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ que Y (définie à la question 4c). On souhaite construire un estimateur du

paramètre λ par une méthode dite du *maximum de vraisemblance*[1].
Soit n un entier naturel non nul et $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n réels supérieurs ou égaux à 1. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$$

et on définit alors la fonction H, sur $\mathbb{R}_+^*$, par

$$H \ : \ \lambda \longmapsto H(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, x_i^{-\lambda-1}.$$

(8) On définit la fonction $\varphi \ : \ \lambda \longmapsto \varphi(\lambda) = \ln\left(H(\lambda)\right)$.
   (a) Montrer que : $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - (\lambda+1)S_n$.
   (b) Calculer $\varphi'(\lambda)$ puis montrer que φ admet un maximum atteint en $\lambda^* = \dfrac{n}{S_n}$.

(9) On pose

$$T_n = \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ln(Y_i)}$$

et **on admet** que

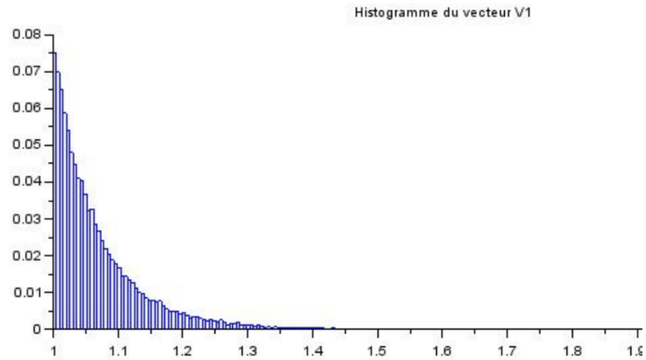
$$E(T_n) = \frac{n}{n-1}\lambda, \qquad \text{et} \quad V(T_n) = \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2.$$

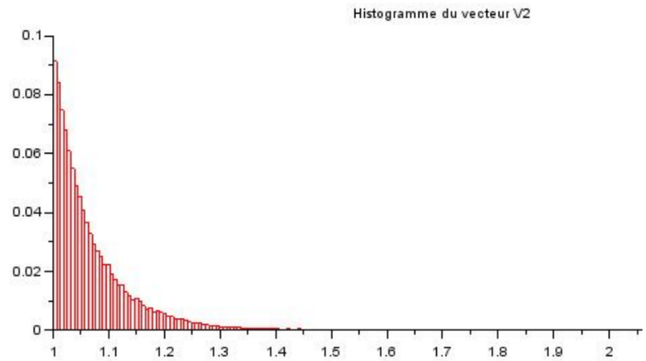
   (a) Justifier que T_n est un estimateur de λ.
   (b) Montrer que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de λ puis déterminer un réel c_n tel que $T'_n = c_n T_n$ soit un estimateur sans biais de λ.
   (c) Déterminer le risque quadratique de T'_n puis en déduire que c'est un estimateur convergent de λ.

```
lambda = input('lambda=?')
n = input('n=?')
V1 = [ ]
V2 = [ ]
for i = [1:50000]
    V1 = [ V1, Simu_Z(lambda , n) ];
    V2 = [ V2, Pareto(lambda*n) ];
end
histplot(200, V1)
xtitle("Histogramme_du_vecteur_V1")
histplot(200, V2)
xtitle("Histogramme_du_vecteur_V2")
```

Pour différentes valeurs de *lambda* et n entrées par l'utilisateur, on obtient des graphiques similaires à ceux reproduits ci-dessous (seules les valeurs numériques changent).

[1]Méthode déjà rencontrée dans quelques sujets EDHEC





Problème 2

On définit, pour tous réels a et b, $M(a,b)$ la matrice carrée d'ordre 4 par :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 & a \\ b & b & b & b \end{pmatrix}$$

et on note : $E = \{M(a,b) \ : \ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
L'objectif de cet exercice est de déterminer les matrices de E qui sont diagonalisables.

(1) (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4$.
Déterminer une base de E et sa dimension.
(b) Le produit de deux matrices quelconques de E appartient-il encore à E ?

(2) **Étude du cas $a = 0$ et $b = 0$.**
Justifier que la matrice $M(0,0)$ est diagonalisable.

(3) **Étude du cas $a \neq 0$ et $b = 0$.**
Soit a un réel non nul. On note A la matrice $M(a,0)$.
(a) Calculer A^2 et déterminer un polynôme annulateur de A.
(b) En déduire les valeurs propres de la matrice A et préciser une base de chacun des sous-espaces propres associés.
(c) En déduire que la matrice A est diagonalisable. Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_4$ inversible et une matrice D de $\mathcal{M}_4$ diagonale telles que : $A = PDP^{-1}$.

(4) **Étude du cas $a = 0$ et $b \neq 0$.**
Soit b un réel non nul. On note B la matrice $M(0,b)$.
(a) Déterminer le rang des matrices B et $B - b\,I_4$, I_4 désignant la matrice identité d'ordre 4.

(b) En déduire l'ensemble des valeurs propres de B en précisant la dimension des sous-espaces propres associés.
(c) La matrice B est-elle diagonalisable ?

(5) **Étude du cas $a \neq 0$ et $b \neq 0$.**
Soient a et b deux réels non nuls. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est $M(a,b)$.
On pose :

$$v_1 = (1,1,1,0), \qquad v_2 = (0,0,0,1) \qquad \text{et} \qquad T = \begin{pmatrix} a & a \\ 3b & b \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est de dimension 2 et préciser une base (v_3, v_4) de $\mathrm{Ker}(f)$.
(b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
(c) Déterminer la matrice notée N de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}'$.
(d) Soient λ un réel non nul et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $\mathcal{M}_{4,1}$. Montrer l'équivalence

$$X \text{ est un vecteur propre de } N \text{ associé à } \lambda \Longleftrightarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre de } T \text{ associé à } \lambda \\ z = t = 0 \end{cases}$$

(e) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,1)$.
Déterminer les valeurs propres de T. En déduire que la matrice $M(1,1)$ est diagonalisable.
(f) On suppose dans cette question **uniquement** que $(a,b) = (1,-1)$.
Justifier que T n'admet aucune valeur propre. La matrice $M(1,-1)$ est-elle diagonalisable?
(g) Montrer l'équivalence :

$$M(a,b) \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow a^2 + 10\,ab + b^2 > 0$$

Problème 3

On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I - Étude de f

(1) Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

(2) Déterminer l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur $]0;1[$.

(3) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(4) (a) Montrer que f est dérivable en 0.
(b) Expliciter le développement limité d'ordre 1 de f en 0.
(c) Justifier que f est dérivable sur $]0;1[$ puis, pour $x \in]0;1[$, calculer $f'(x)$.

(5) On pose, pour $y \in \mathbb{R}$, $g(y) = y^2 + y - 1$.
(a) Dresser le tableau de signes de $g(y)$.

(b) Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, $f'(x) = \dfrac{g(\ln(x))}{\ln(x)^2}$.

(c) En déduire que

$$f'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq x_0,$$

où on a posé $x_0 = \exp\left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

(6) Dresser le tableau de variations de f.

(7) Représenter graphiquement l'allure de la courbe de f. On fera apparaître la tangente en 0.
On donne

$$e^{-1} \simeq 0.37, \qquad x_0 \simeq 0.2, \qquad f(x_0) \simeq 0.08.$$

Partie II - Étude d'une suite et d'une série

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 \in]0; x_0[, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(8) Montrer que, pour tout $x \in]0;1[$, $f(x) < x$ et en déduire que, pour $x \in [0;1[$, $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$.

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \in]0; x_0[$.

(10) Montrer que (u_n) est monotone.

(11) En déduire que (u_n) converge vers une limite à préciser.

(12) Écrire un programme `SciLab` qui demande à l'utilisateur de rentrer la valeur de x_0 et calcule puis affiche le plus petit entier n tel que $u_n \leq 10^{-3}$.

(13) Le but de cette dernière question est l'étude de la convergence de la série $\sum u_n$.

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_{n+1})^2 - \ln(u_n)^2$.
Montrer que la série de terme général v_n diverge.

(b) Rappeler un équivalent en 0 de $\ln(1+x)$ et de $(1+x)^2 - 1$.

(c) Montrer que

$$v_n = \ln(u_n)^2 \left[\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \right)^2 - 1 \right].$$

(d) Déduire des deux questions précédentes que $v_n \sim 2,\ n \to +\infty$.

(e) **On admet** que $\ln(u_n)^2 \sim 2n,\ n \to +\infty$.
Montrer que

$$n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_n \ln^4(u_n)}{4},$$

puis que

$$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty.$$

(f) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3*

On pose
$$H(x)=\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\mathrm{d}t.$$

(1) Déterminer le domaine de définition de H, c'est à dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'intégrale ci-dessus est convergente.
(2) Justifier que $H(x)\to 0$, lorsque $x\to+\infty$.
(3) Justifier que H est $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et que
$$H'(x)=-\frac{e^{-x^2}}{2(1+x)}.$$
En déduire les variations de H.
(4) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}H(x)\mathrm{d}x$ converge et que
$$\int_0^{+\infty}H(x)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{4}-H(0).$$
(5) On définit une suite (x_n) en posant $x_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{n+1}=H(x_n)$.
  (a) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n est bien définie et que $x_n>0$.
  (b) Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $H(\alpha)=\alpha$.
  (c) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|x_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|x_n-\alpha|.$$
  (d) En déduire la convergence de (x_n).