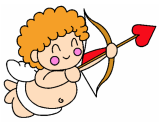
ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`



Devoir Maison n°8

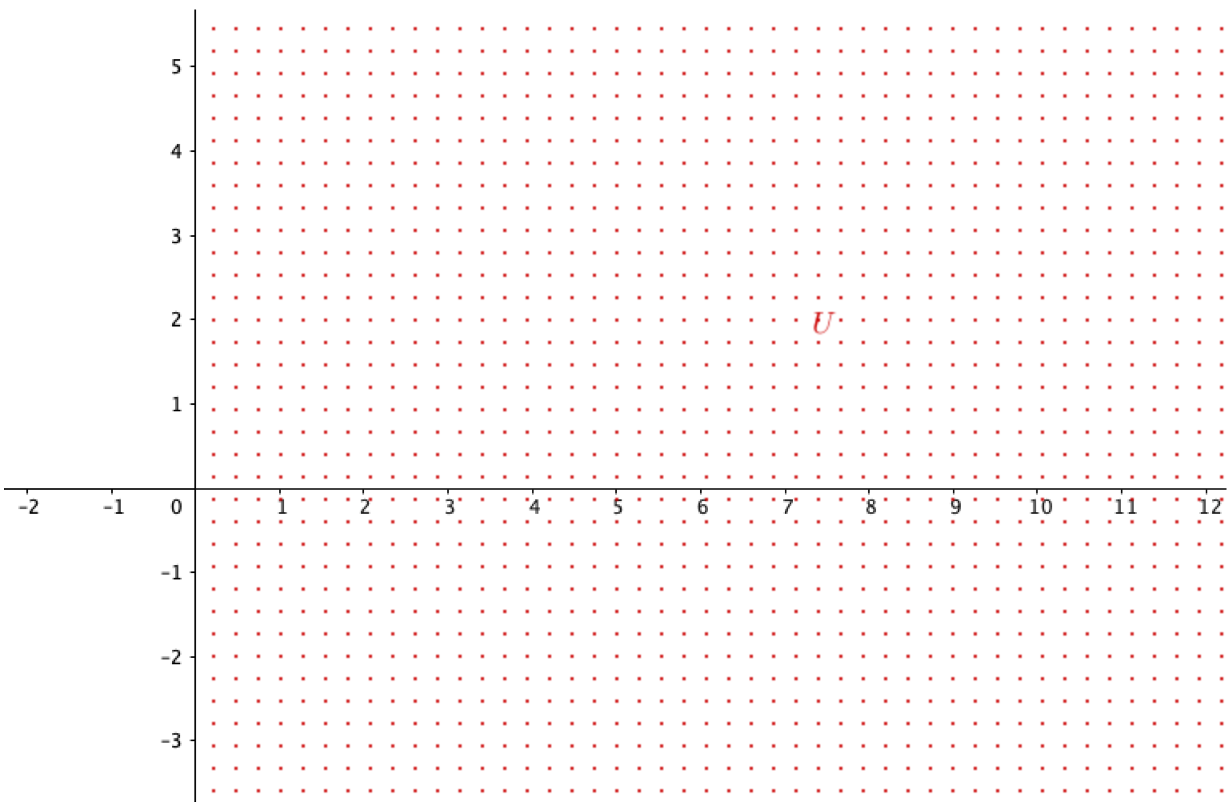
Solution

Exercice 1 (Facile)

On considère la fonction de deux variables G définie sur l'ouvert $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^*$ par

$$G(x,y) = \frac{x^2}{2y^2} - \ln(x) + y - \frac{3}{2}.$$

(1) Il s'agit du demi-plan de droite (ouvert) auquel on retire l'axe des abscisses $y = 0$.



(2) On a

- La fonction $(x,y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur U et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction $t \mapsto -\ln(t)$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\hookrightarrow \text{Par composition,} \quad (x,y) \mapsto ln(x) \text{ est ce classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U$$

- Les fonctions $(x,y)\mapsto x^2$ et $(x,y)\mapsto 2y^2$ sont polynomiales donc $\mathcal{C}^2$ sur U et la seconde ne s'annule pas sur U.

$$\hookrightarrow \text{Par quotient,} \quad (x,y)\mapsto \frac{x^2}{2y^2} \text{ est ce classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U$$

- La fonction $(x,y)\mapsto y-\frac{3}{2}$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

$$\hookrightarrow \text{Par somme,} \quad (x,y)\mapsto G(x,y) \text{ est ce classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } U.$$

(3) Soit $(x,y)\in U$.

$$\begin{aligned}
\partial_1 G(x,y) &= \frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\\
\partial_2 G(x,y) &= -\frac{x^2}{y^3}+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} G(x,y) &= \frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\\
\partial^2_{2,1} G(x,y) &= \partial^2_{1,2} G(x,y)\\
&= -\frac{2x}{y^3}\\
\partial^2_{2,2} G(x,y) &= \frac{3x^2}{y^4}
\end{aligned}$$

(4) La fonction G ne peut présenter d'extremum qu'en un point critique. On les cherche donc.

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } G &\iff \begin{cases} \frac{x}{y^2}-\frac{1}{x} = 0\\ -\frac{x^2}{y^3}+1 = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} \frac{x^2}{y^2}-1 = 0\\ -\frac{x^2}{y^3}+1 = 0\end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = y^2\\ -\frac{y^2}{y^3}+1 = 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} x^2 = y^2\\ y = 1\end{cases} \iff \begin{cases} x = 1\\ y = 1\end{cases} \qquad (\text{car } x>0)
\end{aligned}$$

Ainsi, G n'admet qu'un seul point critique, de coordonnées $(1,1)$. C'est le seul point où G peut présenter un extremum mais il faut regarder les valeurs propres de la hessienne au point pour conclure.

(5) On forme alors la hessienne de G en $(1,1)$

$$H=\nabla^2 G(1,1)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } H &\iff H-\lambda I \text{ non inversible}\\
&\iff \det(H-\lambda I)=0\\
&\iff (2-\lambda)(3-\lambda)-4=0\\
&\iff \lambda^2-5\lambda+2=0\\
&\iff \lambda=\frac{5+\sqrt{17}}{2}>0 \text{ ou } \lambda=\frac{5-\sqrt{16}}{2}=\frac{\sqrt{25}-\sqrt{17}}{2}>0
\end{aligned}$$

Les deux valeurs propres sont strictement positives, on peut donc conclure que G présente un minimum global en $(1,1)$.
Ce minimum vaut $G(1,1)=0$.

En observant par exemple que $G(1,-1)=-2<0$, on peut rapidement conclure que le minimum n'est pas global.

Exercice 2 (Facile Facile)

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0=1, \quad \text{et pour } n\geqslant 0, \quad u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{1+u_n}.$$

(1) La fonction à introduire est $f: x\mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}=2-\dfrac{1}{x+1}$.
C'est un quotient de polynômes défini, (continu et) dérivable sur $]-\infty;1[$ et sur $]-1;+\infty[$. On a

$$f'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}>0$$

donc f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles qui compose son domaine de définition.

(2) On montre par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $1\leqslant u_n\leqslant 2$.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=0$, $u_0=1\in 51;2]$.

- <u>hérédité.</u> Supposons donc que, pour un certain $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et soit élément de $[1;2]$. Comme $[1,2]$ est dans le domaine de définition de f alors $u_{n+1}=f(u_n)$ existe. De plus, par **croissance de** f on a

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \leqslant & u_n & \leqslant & 2\\
f(1) & \leqslant & f(u_n) & \leqslant & f(2)\\
3/2 & \leqslant & u_{n+1} & \leqslant & 5/3
\end{array}$$

  Comme $3/2>1$ et $5/6<2$ on a bien $u_{n+1}\in[1;2]$ et la récurrence est terminée.

(3) Commençons par poser $g(x)=f(x)-x$. On a $g'(x)=f'(x)-1=\frac{1}{(1+x)^2}-1<0$ si $x>0$ et *a fortiori* si $x\in[1;2]$. Ainsi, g est strictement décroissante. Comme $g(1)=-1/2<0$, on peut conclure que $g(x)<0$ sur $[1;2]$ ou encore que $f(x)-x<0$ sur ce même intervalle. En appliquant à $x=u_n$ (ce qu'on peut faire car on sait que tous les termes de la suite sont dans l'intervalle), on a

$$u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n<0$$

et (u_n) est (strictement) décroissante.

(4) Comme (u_n) est décroissante et minorée (par 1) elle converge vers une limite ℓ (également élément de $[1;2]$) par application du théorème de convergence monotone.
En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de f (sur $[1;2]$ et donc en ℓ) permet d'écrire que
$$\ell = f(\ell).$$
Il faut alors résoudre $f(x) = x$ et ne garder que la solution dans l'intervalle où se trouve ℓ. On résout
$$\begin{aligned} f(x) = x \iff & \frac{2x+1}{x+1} = x \\ \iff & 2x+1 = x^2 + x \iff x^2 - x - 1 = 0 \\ \iff & x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Problème 1

Cet exercice et sa solution sont proposés par mon collègue Sofiane Akkouche (René Cassin, Bayonne). Le sujet **EML 2020** s'intéressait également à la loi de *Pareto*. Par ailleurs une démonstration du résultat admis dans la Question (9) est proposée dans la fiche d'approfondissement sur la loi gamma.

Soit λ un réel strictement supérieur à 2 et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

(1) **Donner l'expression de la fonction de répartition de X et préciser son espérance et sa variance.**
On a
$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
et
$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(2) **On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la loi exponentielle de paramètre λ et on pose pour tout entier n non nul :**
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

(a) **Calculer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.**
On a par linéarité de l'espérance :
$$E(S_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$
D'autre part, on a par indépendance des (X_i) :
$$\begin{aligned} V(S_n) &= V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda^2} \\ &= \frac{1}{n\lambda^2}. \end{aligned}$$

(b) **En déduire que S_n est un estimateur sans biais et convergent de $\frac{1}{\lambda}$.**

S_n est une fonction des X_i indépendante de $\frac{1}{\lambda}$ donc c'est un estimateur de $\frac{1}{\lambda}$.
Comme $E(S_n) = \frac{1}{\lambda}$, S_n est un estimateur sans biais et ainsi, son risque quadratique est égal à sa variance. On a alors : $r(S_n) = V(S_n) = \frac{1}{n\lambda^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc S_n est un estimateur convergent.
Ainsi, $\boxed{S_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } \frac{1}{\lambda}.}$

(3) **Montrer que $E\left(e^X\right)$ et $E\left(e^{2X}\right)$ existent et valent respectivement $\frac{\lambda}{\lambda-1}$ et $\frac{\lambda}{\lambda-2}$.**
D'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} E\left(\mathrm{e}^X\right) \text{ existe} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^t f_X(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda-1)t}\mathrm{d}t \text{ converge.} \end{aligned}$$

On peut ensuite faire le calcul de cette intégrale ou remarquer qu'on est (presque) en présence de la densité d'une loi exponentielle, comme on fait ci dessous.
On a par définition de la densité d'une loi exponentielle de paramètre $(\lambda - 1)$:

$$\int_0^{+\infty} (\lambda-1)\mathrm{e}^{-(\lambda-1)t}\mathrm{d}t = 1,$$

ce qui donne :

$$\lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda-1)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda-1}\int_0^{+\infty} (\lambda-1)\mathrm{e}^{-(\lambda-1)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda-1}.$$

Ainsi, $\boxed{E\left(\mathrm{e}^X\right) \text{ existe et } E\left(\mathrm{e}^X\right) = \frac{\lambda}{\lambda-1}.}$
De même : $E\left(\mathrm{e}^{2X}\right)$ existe si et seulement si$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{2t}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \lambda\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda-2)t}\mathrm{d}t$ converge.
Puis en considérant une loi exponentielle de paramètre $(\lambda - 2)$:

$$\lambda \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(\lambda-2)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda-2}\int_0^{+\infty} (\lambda-2)\mathrm{e}^{-(\lambda-2)t}\mathrm{d}t = \frac{\lambda}{\lambda-2}$$

Ainsi, $\boxed{E\left(\mathrm{e}^{2X}\right) \text{ existe et } E\left(\mathrm{e}^{2X}\right) = \frac{\lambda}{\lambda-2}.}$

On pose $Y = \mathrm{e}^X$ et on admet que Y est une variable aléatoire et on note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) **Justifier que $Y(\Omega) = [1, +\infty[$.**
Comme $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, on a : $X(\Omega) = [1, +\infty[$, ce qui donne : $\boxed{Y(\Omega) = exp(X)(\Omega) = [1, +\infty[.}$

(b) **Déterminer $F_Y(t)$ pour $t < 1$ puis montrer que $F_Y(t) = 1 - t^{-\lambda}$ pour $t \geqslant 1$.**
- Comme $Y(\Omega) = [1, +\infty[$, on a : $F_Y(t) = 0$ pour $t < 1$.

- Soit $t \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
F_Y(t) = P(Y \leqslant t) &= P(\mathrm{e}^X \leqslant t) \\
&= P(X \leqslant \ln(t)) \quad \text{par croissance de la fonction } \ln \\
&= F_X(\ln(t)) \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \ln(t)} \quad \text{car } \ln(t) \geqslant 0 \text{ car } t \geqslant 1 \\
&= 1 - \mathrm{e}^{\ln(t^{-\lambda})} \\
&= 1 - t^{-\lambda}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\boxed{F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - t^{-\lambda} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}.}$

(c) **En déduire que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.**
On dit que Y suit une loi de Pareto de paramètres λ et 1, notée $\mathcal{P}(\lambda, 1)$.

- La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ car constante sur $]-\infty, 1[$ et comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$.
- Elle est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et comme $\lim_{x\to 1^-} F_Y(t) = \lim_{x\to 1^+} F_Y(t) = 0 = F_Y(1)$, elle est continue en 1. Ainsi, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que $\boxed{Y \text{ est une variable aléatoire à densité}}$ et on obtient un densité en dérivant F_Y sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et en choisissant $f_Y(1) = 0$ par exemple. Ce qui donne :

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \lambda t^{-\lambda-1} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(5) (a) **Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si$k < \lambda$.**
Justifier alors que Y admet une espérance et une variance.
D'après le théorème de transfert, $E\left(Y^k\right)$ existe si et seulement si$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_Y(t)\mathrm{d}t$ converge absolument
si et seulement si$\int_1^{+\infty} t^k \lambda t^{-\lambda-1}\mathrm{d}t = \lambda \int_1^{+\infty} \dfrac{1}{t^{\lambda+1-k}}\mathrm{d}t$ converge.
On reconnait une intégrale de Riemann qui converge si et seulement si$\lambda + 1 - k > 1$ si et seulement si$k < \lambda$.
Ainsi, $\boxed{E\left(Y^k\right) \text{ existe si et seulement si} k < \lambda.}$
Comme $\lambda > 2$ (d'après l'énoncé, on en déduit que pour $k = 1$ et pour $k = 2$, la condition $k < \lambda$ est vérifiée et ainsi, $\boxed{Y \text{ admet une espérance et un moment d'ordre 2 donc une variance.}}$

(b) **Calculer, à l'aide de la question 3, les valeurs de l'espérance et de la variance de Y.**
On a alors : $\boxed{E(Y) = E(\mathrm{e}^X) = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}.}$

D'autre part, on a :

$$\begin{array}{rcl} V(Y) & = & E(Y^2) - E(Y)^2 \\ & = & E\left((\mathrm{e}^X)^2\right) - E(\mathrm{e}^X)^2 = E\left(\mathrm{e}^{2X}\right) - E(\mathrm{e}^X)^2 \\ & = & \dfrac{\lambda}{\lambda-2} - \left(\dfrac{\lambda}{\lambda-1}\right)^2 \\ & = & \dfrac{\lambda(\lambda-1)^2 - \lambda^2(\lambda-2)}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2} \\ & = & \dfrac{\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda - \lambda^3 + 2\lambda^2}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2} \\ & = & \dfrac{\lambda}{(\lambda-2)(\lambda-1)^2} \end{array}$$

On considère une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ que Y (définie à la question 4c) et on pose pour tout entier n non nul : $Z_n = \min(Y_1, \dots, Y_n)$.

(6) **Simulation informatique.**

(a) **On rappelle qu'en `Scilab`, la commande $grand(1, 1, 'exp', m)$ simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $1/m$.**
Écrire une fonction d'entête *function Y = Pareto(lambda)* qui permet de simuler la variable aléatoire $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda, 1)$ suivant une loi de Pareto de paramètres *lambda* et 1.

```
function Y = Pareto(lambda)
    X = grand(1,1,"exp",1/lambda)
    Y = exp(X)
endfunction
```

(b) **Compléter la fonction suivante pour qu'elle permette de simuler la variable Z_n.**

```
function Z = Simu_Z(lambda,n)
    Y = Pareto(lambda)
    Z = Y
    for i =2 : n       //on simule Y_2 , ... , Y_n
        Y = Pareto(lambda)
        if Y<Z then            //si la nouvelle valeur de Y est inférieur à Z
            Z = Y              //alors on met à jour le minimum
        end
    end
endfunction
```

(c) **On considère le script donné en annexe ainsi que les graphiques associés.**
A partir des graphiques obtenus, conjecturer la loi suivie par la variable Z_n.
Le premier graphique représente l'histogramme de la variable $Z_n = \min(Y_1, \dots, Y_n)$.
Le second graphique représente l'histogramme d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètres $\lambda \times n$ et 1 : $\mathcal{P}(\lambda n, 1)$.
La similarité entre les deux graphiques permet de conjecturer que
$\boxed{Z_n \text{ suit une loi de Pareto de paramètres } \lambda \times n \text{ et } 1 :\ \mathcal{P}(\lambda n, 1).}$

(7) (a) **Soit $t \geqslant 1$. Montrer que : $P(Z_n > t) = t^{-\lambda n}$.**
Soit $t \geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
P(Z_n > t) &= P\left(\min(Y_1, \ldots, Y_n) > t\right) \\
&= P\left((Y_1 > t) \cap \cdots \cap (Y_n > t)\right) \\
&= P(Y_1 > t) \ldots P(Y_n > t) \quad \text{par indépendance} \\
&= P(Y > t)^n \quad \text{car les varaibles suivent la même loi que } Y \\
&= \left(1 - P(Y \leqslant t)\right)^n \\
&= \left(1 - (1 - t^{-\lambda})\right)^n = \left(t^{-\lambda}\right)^n = t^{-\lambda n}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(Z_n > t) = t^{-\lambda n}.}$

(b) **En déduire la fonction de répartition de Z_n puis vérifier que Z_n suit également une loi de Pareto dont on précisera les paramètres.**
Comme $Y(\Omega) = [1, +\infty[$, on a : $Z(\Omega) = [1, +\infty[$ donc $P(Z_n \leqslant t) = 0$ pour $t < 1$.
D'autre part, on a d'après la question précédente : $P(Z_n \leqslant t) = 1 - P(Z_n > t) = 1 - t^{-\lambda n}$ pour $t \geqslant 1$. Ainsi, on a : $F_{Z_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 - t^{-\lambda n} & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$, et on reconnait la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètres λn et 1 donc $\boxed{Z_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda n, 1).}$

On considère encore une suite de variables aléatoires $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, indépendantes et suivant toutes la même loi de Pareto $\mathcal{P}(\lambda, 1)$ que Y (définie à la question 4c). On souhaite construire un estimateur du paramètre λ par une méthode dite "du maximum de vraisemblance".
Soit n un entier naturel non nul et x_1, x_2, ..., x_n, n réels supérieurs ou égaux à 1. On pose : $S_n = \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)$.
On définit alors la fonction H définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $H : \lambda \longmapsto H(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda\, x_i^{-\lambda-1}$.

resume **On définit la fonction $\varphi : \lambda \longmapsto \varphi(\lambda) = \ln\left(H(\lambda)\right)$.**
(a) **Montrer que : $\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - (\lambda+1)S_n$.**
On a, :

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda) = \ln\left(H(\lambda)\right) &= \ln\left(\prod_{i=1}^{n} \lambda\, x_i^{-\lambda-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\lambda\, x_i^{-\lambda-1}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \ln(\lambda) + \ln\left(x_i^{-\lambda-1}\right) \\
&= n\ln(\lambda) + (-\lambda-1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) = n\ln(\lambda) - (\lambda+1)S_n
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - (\lambda+1)S_n.}$

(b) **Calculer $\varphi'(\lambda)$ puis montrer que φ admet un maximum atteint en $\lambda^* = \dfrac{n}{S_n}$.**
φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a pour tout λ de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - S_n.$$

(On dérive par rapport à λ.)
On a alors :

$$\varphi'(\lambda) \geqslant 0 \iff \frac{n}{\lambda} - S_n \geqslant 0 \iff \lambda \leqslant \frac{n}{S_n} = \lambda^*,$$

ce qui donne :

λ	0		λ^*		$+\infty$
$\varphi'(\lambda)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(\lambda)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Ainsi, $\boxed{\varphi \text{ admet un maximum atteint en } \lambda^* = \dfrac{n}{S_n}.}$

resume **On pose** $T_n = \dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} \ln(Y_i)}$ **et on admet que** $E(T_n) = \dfrac{n}{n-1}\lambda$ **et** $V(T_n) = \dfrac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2$**.**

(a) **Justifier que T_n est un estimateur de λ.**

$\boxed{T_n \text{ est une fonction des } Y_i \text{ indépendante de } \lambda \text{ donc c'est un estimateur de } \lambda.}$

(b) **Montrer que T_n est un estimateur asymptotiquement sans biais de λ puis déterminer un réel c_n tel que $T'_n = c_n T_n$ soit un estimateur sans biais de λ.**

On a : $E(T_n) = \dfrac{n}{n-1}\lambda \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda$ donc $\boxed{T_n \text{ est un estimateur asymptotiquement sans biais de } \lambda.}$

On cherche alors c_n tel que $E(T'_n) = E(c_n T_n) = \lambda$.

Or, par linéarité de l'espérance, on a : $E(c_n T_n) = c_n E(T_n) = \lambda$ ce qui donne

$$c_n = \frac{\lambda}{E(T_n)} = \frac{\lambda}{\frac{n}{n-1}\lambda} = \frac{n-1}{n}$$

Ainsi, $\boxed{T'_n = \dfrac{n-1}{n} T_n \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda.}$

(c) **Déterminer le risque quadratique de T'_n puis en déduire que c'est un estimateur convergent de λ.**

Comme T'_n est un estimateur sans biais de λ, son risque quadratique est égal à sa variance, ce qui donne :

$$r(T'_n) = V(T'_n) = V\left(\frac{n-1}{n}T_n\right) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V(T_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{(n-2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\boxed{T'_n \text{ est un estimateur convergent de } \lambda.}$

Problème 2

Ce problème est extrait du sujet **EML 2020** (c'est l'Exercice 2). Une solution très détaillée (par Roxane Duroux et Arnaud Jobin) est disponible ici.

Problème 3

On considère la fonction f définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude de la fonction f

(1) **Montrer que la fonction f est continue sur $[0;1[$.**

- La fonction f est continue sur $]0;1[$ comme produit et quotient de fonctions continues de dénominateur non nul ($\ln(x) \neq 0$ car $x \neq 1$).
- De plus : $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0$ par quotient donc $\lim_{x\to 0} 1 + \dfrac{1}{\ln(x)} = 1$ et enfin $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ par produit.
  Ainsi, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.

Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur } [0;1[.}$

(2) **Déterminer l'unique réel x de $]0;1[$ vérifiant $f(x) = 0$.**
On a :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Longleftrightarrow x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 1 + \frac{1}{\ln(x)} = 0 \quad \text{car } x \neq 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{1}{\ln(x)} = -1 \\ &\Longleftrightarrow \ln(x) = -1 \\ &\Longleftrightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{l'unique réel } x \text{ de }]0;1[\text{ vérifiant } f(x) = 0 \text{ est } x = e^{-1}.}$

(3) **Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.**
On a : $\lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$ (car $\ln(x) < 0$ pour $x < 1$).
On a alors : $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\ln(x)} = -\infty$ par quotient donc $\lim_{x\to 1^-} x\left(1 + \dfrac{1}{\ln(x)}\right) = -\infty$ par somme et produit.
Ainsi, $\boxed{\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty.}$

(4) (a) **Montrer que la fonction f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 1$.**
On calcule la limite du taux d'accroissement.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} 1 + \frac{1}{\ln(x)} = 1 \quad \text{calcul déjà fait}$$

Ainsi, $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 1.}$

(b) **Déterminer l'équation de la tangente en 0.**
L'équation de la tangente en 0 est donnée par : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $\boxed{y = x.}$

(5) **Montrer que la fonction f est dérivable sur $]0;1[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;1[$.**
La fonction f est dérivable sur $]0;1[$ comme produit et quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul ($\ln(x) \neq 0$ car $x \neq 1$). Pour tout x de $]0;1[$, on a :

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) + x\left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln(x))^2}\right) = 1 + \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2}$$

(6) **On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(y) = y^2 + y - 1$.**

(a) **Déterminer les racines de g et préciser leur signe. Dresser alors le tableau de signe de g.**
g est une fonction polynômiale de degré 2.
On a : $\Delta = 5$ et $\boxed{\text{les racines de } g \text{ sont } y_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } y_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} > 0.}$
Le coefficient dominant étant positif, on en déduit le tableau de signe suivant :

y	$-\infty$		y_0		0		y_1		$+\infty$
$g(y)$		$+$	0		$-$		0	$+$	

(b) **Pour tout x de $]0;1[$, on pose $y = \ln(x)$.**
Préciser l'ensemble des valeurs prises par y puis vérifier que $f'(x) = \dfrac{g(y)}{y^2}$.
Comme $x \in]0;1[$, on a $y = \ln(x) \in]-\infty;0[$, soit $\boxed{y \in \mathbb{R}_-^*}$.
De plus, on a :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{(\ln(x))^2} = \frac{(\ln(x))^2 + \ln(x) - 1}{(\ln(x))^2} = \frac{y^2 + y - 1}{y^2}$$

soit $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(y)}{y^2}.}$

(c) **En déduire que $\quad f'(x) \geqslant 0 \quad$ si et seulement si $\;x \leqslant x_0\;$ où $x_0 = e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.**
On a :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff \frac{g(y)}{y^2} \geqslant 0 \iff g(y) \geqslant 0$$

Or, on a vu que $y \in \mathbb{R}_-^*$ donc d'après le tableau de signe de g, on a : $\quad g(y) \geqslant 0 \iff y \leqslant y_0$.
Ainsi, on a :

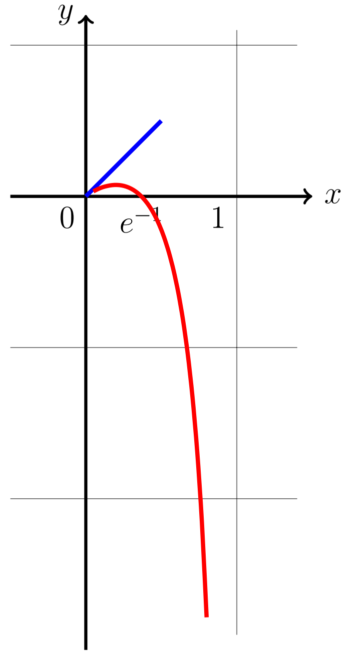
$$f'(x) \geqslant 0 \iff y \leqslant y_0 \iff \ln(x) \leqslant y_0 \iff x \leqslant e^{y_0} \quad \text{par croissance de la fonction exp}$$

Comme $y_0 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a bien : $\boxed{f'(x) \geqslant 0 \;\text{ si et seulement si }\; x \leqslant x_0 \;\text{ où } x_0 = e^{-\frac{1+\sqrt{5}}{2}}.}$

(d) **En déduire le tableau de variations de f faisant apparaitre x_0, $f(x_0)$ ainsi que les limites de f.**
On en déduit le tableau de variations de f.

x	0		x_0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

(7) **Tracer soigneusement le graphe de la fonction f en faisant apparaitre la tangente en 0.**
On donne : $e^{-1} \approx 0,37$, $x_0 \approx 0,2$ ***et*** $f(x_0) \approx 0,08$.
On obtient :



Partie II : Étude d'une suite et d'une série.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 \in]0; x_0[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ **, où x_0 a été défini dans la partie I.**

(8) **Montre que pour tout x de $]0;1[$, $f(x) < x$ puis en déduire que $f(x) = x$ si et seulement si $x = 0$.**
Pour tout x de $]0;1[$, on a :

$$f(x) - x = x\left(1 + \frac{1}{\ln(x)}\right) - x = \frac{x}{\ln(x)} < 0$$

par produit car $x > 0$ et $\ln(x) < 0$ (car $x < 1$). Ainsi, on a : $\boxed{\forall x \in]0;1[,\ f(x) < x.}$
Comme $f(0) = 0$ et qu'on vient de voir que $f(x) \neq x$ pour tout x de $]0;1[$, on a bien $\boxed{f(x) = x \text{ si et seulement si } x = 0.}$

(9) **Montrer que pour tout entier n, u_n est bien défini et $u_n \in]0; x_0[$.**
Par récurrence.
- $u_0 \in]0; x_0[$ par définition.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et $u_n \in]0; x_0[$. Comme $x_0 < 1$, u_n appartient au domaine de définition de f donc $f(u_n) = u_{n+1}$ existe. Ainsi, u_{n+1} est bien défini. De plus, on a :

$$\begin{aligned} & 0 < u_n < x_0 \\ \Longrightarrow\ & f(0) < f(u_n) < f(x_0) \quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur }]0; x_0[\\ \Longrightarrow\ & 0 < u_{n+1} < f(x_0) < x_0 \quad \text{d'après la question précédente} \end{aligned}$$

  Ainsi, $u_{n+1} \in]0; x_0[$.

On peut conclure que $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ u_n \text{ est bien défini et } u_n \in]0; x_0[.}$

(10) **Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.**
On a vu que pour tout x de $]0;1[$, $f(x) < x$.
Or, comme $x_0 < 1$, on a $u_n \in]0; x_0[\subset]0;1[$ d'après la question précédente.
On peut donc poser $x = u_n$, ce qui donne : $\forall n \in \mathbb{N} :\ f(u_n) < u_n$ soit $u_{n+1} < u_n$.
Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$

(11) **En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et montrer que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.**
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc $\boxed{\text{elle converge vers une limite } \ell.}$
Comme f est continue sur $[0;1[$, on sait que ℓ vérifie l'équation $f(\ell) = \ell$ soit $\ell = 0$ d'après la question 8.
Ainsi, $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$

(12) **Écrire un programme Scilab qui demande la valeur de u_0 à l'utilisateur et qui renvoie le plus petit entier n tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.**

```
u = input(" donner la valeur de u0 ")
n=0
while u > 10^(-3) do
    u = u*(1+1/log(u))
    n = n+1
end
disp(n)
```

(13) **On souhaite à présent étudier la convergence de la série $\sum u_n$.**

(a) **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = (\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2$.**
Montrer que la série de terme général v_n diverge.
On reconnait une somme téléscopique. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} v_n &= \sum_{n=0}^{N} (\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 \\ &= (\ln(u_{N+1}))^2 - (\ln(u_0))^2 \qquad \text{somme téléscopique} \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

car $\lim_{N\to+\infty} u_{N+1} = 0$ donc $\lim_{N\to+\infty} \ln(u_{N+1}) = -\infty$ et $\lim_{N\to+\infty} (\ln(u_{N+1}))^2 = +\infty$.
Ainsi les sommes partielles divergent donc $\boxed{\text{la série de terme général } v_n \text{ diverge.}}$

(b) **Rappeler un équivalent de $\ln(1+x)$ et un équivalent de $(1+x)^2 - 1$ au voisinage de 0.**
On a, au voisinage de 0 :

$$\boxed{\ln(1+x) \sim x \quad \text{et} \quad (1+x)^2 - 1 \sim 2x, \quad x \to 0}$$

(c) **Montrer que : $(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2 \left[\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}\right)^2 - 1\right]$.**

On commence par factoriser par $(\ln(u_n))^2$, ce qui donne :

$$(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2 \left[\frac{(\ln(u_{n+1}))^2}{(\ln(u_n))^2} - 1\right] = (\ln(u_n))^2 \left[\left(\frac{\ln(u_{n+1})}{\ln(u_n)}\right)^2 - 1\right] \qquad (\star)$$

Or, on a :

$$\ln(u_{n+1}) = \ln(f(u_n)) = \ln\left(u_n\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)\right) = \ln(u_n) + \ln\left(1 + \frac{1}{\ln(u_n)}\right)$$

donc

$$\left(\frac{\ln(u_{n+1})}{\ln(u_n)}\right) = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}$$

ce qui donne la relation voulue en réinjectant dans ($\star$).

Ainsi, $\boxed{(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2 \left[\left(1 + \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}\right)^2 - 1\right].}$

(d) **Déduire des deux questions précédentes que** $(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 \sim 2$**.**

Posons $a_n = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)}$ de sorte que : $(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 = (\ln(u_n))^2 \left[(1+a_n)^2 - 1\right]$.

Comme $u_n \longrightarrow 0$, on a : $\ln(u_n) \longrightarrow -\infty$ donc $1+\frac{1}{\ln(u_n)} \longrightarrow 1$ par quotient puis $\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right) \longrightarrow 0$ par composition. Ainsi, par quotient, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

On peut donc utiliser l'équivalent $(1+a_n)^2 - 1 \sim 2a_n$ ce qui donne :

$$
\begin{aligned}
(\ln(u_{n+1}))^2 - (\ln(u_n))^2 &= (\ln(u_n))^2 \left[(1+a_n)^2 - 1\right] \\
&\sim (\ln(u_n))^2\, 2a_n \\
&\sim 2\,(\ln(u_n))^2 \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \\
&\sim 2\,(\ln(u_n))^2 \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right)}{\ln(u_n)} \\
&\sim 2\ln(u_n)\ln\left(1+\frac{1}{\ln(u_n)}\right) \\
&\sim 2\ln(u_n)\frac{1}{\ln(u_n)} \qquad \text{car} \quad \ln(1+x)\sim x \quad \text{et} \quad \frac{1}{\ln(u_n)} \longrightarrow 0 \\
&\sim 2
\end{aligned}
$$

et BAM !, voilà le résultat. Envoyez les autres questions...

(e) **On admet que** $(\ln(u_n))^2 \sim 2n$**. En déduire que :** $n^2 u_n \sim \dfrac{u_n \ln^4(u_n)}{4}$**, puis que :** $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$**.**

On admet que $(\ln(u_n))^2 \sim 2n$, ce qui donne par opérations valides sur les équivalents :

$$(\ln(u_n))^2 \sim 2n \implies n \sim \frac{(\ln(u_n))^2}{2} \implies n^2 \sim \frac{(\ln(u_n))^4}{4} \implies n^2 u_n \sim \frac{u_n\,(\ln(u_n))^4}{4}$$

Pour montrer que $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, il s'agit de montrer que : $\lim_{+\infty} \dfrac{u_n}{1/n^2} = 0$ soit $\lim_{+\infty} n^2 u_n = 0$.

Or, on a : $n^2 u_n \sim \dfrac{u_n\,(\ln(u_n))^4}{4}$ donc $\lim_{+\infty} n^2 u_n = \lim_{+\infty} \dfrac{u_n\,(\ln(u_n))^4}{4} = 0$ car $\lim_{+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{x\to 0} x\ln(x)^4 = 0$ par croissances comparées.

Ainsi, $\boxed{u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right).}$

(f) **En déduire que la série** $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ **est convergente.**

- On vient de voir que : $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
- La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ est convergente comme série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$.
- Les séries sont à termes positifs.

Donc par théorème de comparaison, $\boxed{\text{la série } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ converge également.}}$

Exercice 3*

On pose
$$H(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\mathrm{d}t.$$

(1) Tout d'abord, si $x > -1$, la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}$ est continue sur $[x; +\infty[$ et l'intégrale n'est impropre qu'en $+\infty$. Comme
$$\frac{e^{-t^2}}{2(1+t)} = o\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \to +\infty$$
par croissance comparée, le critère de comparaison par négligeabilité pour les fonctions positives (ce qui est bien le cas ici) s'applique. Conjugué au critère de Riemann, on a bien la convergence de l'intégrale qui définit $H(x)$.
En revanche si $x = -1$, l'intégrale devient impropre en -1. Et comme
$$\frac{e^{-t^2}}{2(1+t)} \sim \frac{e^{-1}}{2(1+t)}, \qquad t \to -1$$
qui est une fonction dont l'intégrale diverge. En effet, il suffit du changement de variable $u = 1+t$ pour se ramener à une intégrale de Riemann qui diverge en 0.
Si $x < -1$ l'intégrale ne peut converger car elle "passe" par -1.
On peut donc conclure que
$$\mathcal{D}_H =]-1; +\infty[.$$

(2) Comme $H(0)$ est une intégrale convergente, $H(x)$ peut être interprété comme le reste de cette intégrale convergente; la quantité tend donc bien vers 0 lorsque $x \to +\infty$.

(3) La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}$ est continue sur $]-1; +\infty[$ (quotient d'une exponentielle et d'un polynôme qui ne s'annule pas). Elle admet donc (par le théorème fondamental de l'analyse) des primitive sur ce même intervalle. Notons G une primitive. On a
$$H(x) = \lim_{A\to+\infty} G(A) - G(x).$$
G étant clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$ (comme primitive d'une fonction continue), la fonction H l'est également sur ce même intervalle, et on a bien
$$H'(x) = -G'(x) = -\frac{e^{-x^2}}{2(1+x)} < 0.$$
Donc H est strictement décroissante sur son domaine de définition.

(4) Soit $A > 0$. Posons
$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) & = & 1 \\ v(t) & = & H(t) \end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) & = & 1+t \\ v(t) & = & -\dfrac{e^{-t^2}}{2(1+t)} \end{array}\right.$$
Les fonctions u et v étant toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, A]$, l'intégration par parties est licite et donne
$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^A H(t)\mathrm{d}t & = & [(1+t)H(t)]_0^A + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^A e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ & = & (1+A)H(A) - H(0) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^A e^{-t^2}\mathrm{d}t. \end{array}$$

Mais, d'une part par changement de variable affine ($u = \sqrt{2}t$) et parité (et en reconnaisant à coefficient près la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$), on a

$$\int_0^A e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2}A} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2\pi} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

D'autre part, comme (pour $x > -1$) l'intégrale

$$J(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

est convergente (pour mille raisons dont les mêmes arguments qu'à la toute première question), et que, pour $t \geqslant x$,

$$(1+x)\frac{e^{-t^2}}{2(1+t)} \leqslant \frac{e^{-t^2}}{2}$$

la positivité de l'intégrale donne

$$0 \leqslant (1+x)H(x) \leqslant J(x)$$

Mais $J(x)$ est encore le reste d'une intégrale convergente et tend donc vers 0. Par théorème des gendarmes, on a que $(1+x)H(x)$ tend vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
(On aurait aussi pu montrer et dire que $(1+x)H(x) \leqslant \sqrt{\pi}(1-\Phi(x))/2$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.)
Bilan des courses

$$\int_0^{+\infty} H(x)\mathrm{d}x$$

converge et

$$\int_0^{+\infty} H(x)\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4} - H(0).$$

(5) On définit une suite (x_n) en posant $x_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = H(x_n)$.

(a) C'est une récurrence. L'initialisation est donnée. Si c'est vrai au rang n alors $x_n \in \mathcal{D}_H$ et $u_{n+1} = H(u_n)$ existe. De plus, on peut voir (à partir de la stricte décroissance et de la continuité de H qui permettent d'appliquer le théorème de bijection) que H réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ainsi $u_{n+1} = H(u_n) > 0$.
La récurrence est terminée.

(b) C'est classique. Il faut poser $\varphi :\ x \mapsto H(x) - x$ et montrer que φ réalise une bijection d'une partie de son ensemble de définition vers un intervalle qui contient 0 de sorte que ce dernier admette un unique antécédent que l'on note α.On souhaite donc appliquer le théorème de bijection. On a

$$\varphi'(x) = H'(x) - 1 < 0$$

donc φ est strictement décroissante (et continue), elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, H(0)]$. Or $H(0) > 0$. En effet si $A > 0$

$$H(0) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\mathrm{d}t \geqslant \int_0^A \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}\mathrm{d}t > 0$$

car $t \mapsto \frac{e^{-t^2}}{2(1+t)}$ est (continue et) positive et non identiquement nulle sur le segment $[0;A]$.

donc $0 \in]-\infty, H(0)]$ et on a la conclusion souhaitée.

(c) C'est l'inégalité des accroissements finis appliquée à H qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, intervalle dans lequel vivent tous les termes de la suite (x_n). Il reste juste à vérifier que, pour tout $x \geqslant 0$, on a $|H'(x)| \leqslant 1/2$. Mais c'est clair. Si $x \geqslant 0$, alors

$$|H'(x)| = \frac{e^{-x^2}}{2(1+x)} \leqslant \frac{1}{2(1+x)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$|x_{n+1} - \alpha| = |H(x_n) - H(\alpha)| \leqslant \frac{1}{2}|x_n - \alpha|.$$

(d) Une récurrence immédiate donne, à partir de la question précédente

$$|x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \alpha|.$$

Un petit coup de théorème des gendarmes et on peut affirmer que $x_n \to \alpha$.