ECE 2 - Année 2021-2022
E.N.C Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir de rentrée (a.k.a DS 0)

Mercredi 1er Septembre
Durée : 2 heures 40

Amuse-bouche

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et pour } n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{1 + u_n}.$$

(1) Introduire une fonction f dont on dressera le tableau de variations, telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.
(2) Montrer que (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
(3) Montrer que (u_n) est monotone.
(4) En déduire la convergence de (u_n) et préciser sa limite ℓ.
(5) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(6) Ècrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche un entier N tel que u_N fournisse une approximation de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

(1) (a) Calculer $(A - 3I)^2$.
(b) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

(2) On note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 3X\}$.
(a) F est-il un espace vectoriel ?
(b) En résolvant l'équation $AX = 3X$ d'inconnue X, montrer qu'il existe U et V deux vecteurs que l'on déterminera tels que $F = \mathrm{Vect}(U, V)$.
(c) Retrouver le résultat de la question (2a) . La famille (U, V) est-elle une base de F?

(3) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que P est inversible et déterminer son inverse.

(b) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, P^{-1}A^nP = T^n$.

(4) (a) Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T = 3I + N$.
(b) Calculer N^2 et en déduire N^k pour $k \in \mathbb{N}$.
(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer T^n comme combinaison linéaire de I et de N.
(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer enfin T^n comme combinaison linéaire de I et de T.

(5) (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = n3^{n-1}A - (n-1)3^nI$.
(b) Vérifier que la formule trouvé à la question précédente reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement *Pile-Pile*, alors $X = 0$, et si les lancers donnent successivement *Face-Pile-Face-Face-Pile*, alors $X = 3$.

(1) (a) Déterminer $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.
(b) Plus généralement, déterminer la loi de la variable aléatoire X.
(c) Vérifier que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1.$$

(2) Que peut-on dire de l'événement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce » ?
(3) Montrer que la variable X admet une espérance et la calculer.
(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
p=0.3;
S=0; n=0;
while S<2
    n=n+1;
    if ............  then
        S=S+1;
    end
end
disp(.............)
```