ECE 2 - Année 2021-2022
E.N.C Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir de rentrée (a.k.a DS 0)

jeudi 2 Septembre
Solution

Amuse-bouche

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \quad \text{et pour } n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{1 + u_n}.$$

(1) La fonction cherchée est $f : x \mapsto \frac{2x+1}{1+x}$. Son domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$. En tant que quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule ni sur $]-\infty; -1[$, ni sur $]-1; +\infty[$, f est dérivable (et *a foritiori* continue) sur chacun de ces deux intervalles. Sa dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$$

et par conséquent, f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles précédents[1]. Ce n'était pas demandé, mais on peut voir, en factorisant par x pour les limites en $\pm\infty$ que

$$\lim_{x \to +\pm\infty} f(x) = \lim_{x \to +\pm\infty} \frac{2 + 1/x}{1 + 1/x} = 2$$

et que, par algèbre des limites,

$$\lim_{x \to -1^{\mp}} f(x) \pm \infty.$$

On dresse alors son tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	2

(2) Comme (u_n) est définie à partir de f qui n'est pas définie sur $\mathbb{R}$, la question a du sens; si u_n prenait une valeur interdite pour f, on ne pourrait pas générer le terme suivant. On montre donc la bonne définition de la suite, et l'encadrement, simultanément dans une récurrence.

[1] Attention, on rappelle qu'écrire que f est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ n'a pas de sens. Si on ne sait pas pourquoi, on invite à poser la question.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$. On a $u_0 = 1$ qui est bien défini et qui est compris entre 1 et 2. La propriété est donc vérifiée.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain entier $n \geq 0$, on ait u_n bien défini et $1 \leq u_n \leq 2$. Comme u_n est dans $[1; 2]$, il est en particulier dans le domaine de définition de f et donc $u_{n+1} = f(u_n)$ existe. Par hypothèse de récurrence, on a
$$1 \leq u_n \leq 2$$
ce qui donne, par croissance de f,
$$1 \leq \frac{3}{2} = f(1) \leq f(u_n) = u_{n+1} \leq f(2) = \frac{5}{3} \leq 2$$
ce qui est bien la propriété au rang $n + 1$ et termine la récurrence.

(3) Pour la monotonie de la suite, on pourrait regarder le signe de $u_{n+1} - u_n$. Ici, ce n'est pas forcément le plus rapide. On propose quand même, à titre pédagogique de le faire après, mais il est nettement plus simple de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$ par récurrence.
- <u>initialisation</u>. Pour $n = 0$, on a bien
$$u_0 = 1 \leq \frac{3}{2} = f(u_0) = u_1.$$
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$. Alors, par croissance de f (et c'est à ça que sert la croissance de f), on a
$$u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2},$$
ce qui est la propriété au rang $n + 1$ et termine la récurrence.

La suite est donc croissante. Attention, on aurait pu avoir une suite décroissance (bien que f soit croissante) si les deux premiers termes s'étaient retrouvés rangés dans l'autre sens.

Comme promis, on propose aussi une preuve alternative via le calcul de $u_{n+1} - u_n$.
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n + 1 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n + 1}{u_n + 1} \end{aligned}$$
Il est alors utile de connaître de signe de la quantité au numérateur. Pour ce faire, on regarde la quantité $g(x) = -x^2 + x + 1$, trinôme du second degré, sur $[1; 2]$, intervalle où vivent les termes de la suite.

x	$-\infty$		$(1-\sqrt{5})/2$		1		$(1+\sqrt{5})/2$		2		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	

On constate notamment que le signe du numérateur change sur l'intervalle où se trouvent tous les termes de la suite. Ce qui veut dire que notre encadrement des termes n'est pas assez précis. Ici, le sujet ne ne nous aide pas beaucoup et demande une grande initiative; pas très sympa, on peut espérer qu'au concours, on nous aide davantage. Cela dit, se confronter à ce problème est instructif.
On part d'un premier terme $u_0 = 1$, à droite de 1, le signe est positif; on peut imaginer que la suite

va croître et finalement, que tous les termes vont avoir pour majorant $(1+\sqrt{5})/2$. Ce qu'on montre par récurrence, avec la croissance de f. On ne propose ici qu'une preuve abrégée de l'hérédité.

Comme $u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et que f est croissante, on a

$$u_{n+1} \leq f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

et c'est bien vérifié. On a même trouvé un *point fixe* de f. On peut donc conclure que notre suite (u_n) est croissante.

(4) La suite est croissante et majorée (par 2 ou mieux, par $(1+\sqrt{5})/2$. Par le **théorème de convergence monotone**, elle converge vers une certaine limite ℓ qu'on ne peut pas expliciter pour l'instant.

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et que f est continue partout (et notamment là où se trouvent tous les termes de la suite), le passage à la limite donne

$$\ell = f(\ell)$$

Cette équation est donc l'équation de point fixe. On l'a implicitement résolue en étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ car on a étudié le signe de $f(x) - x$. On a trouvé deux points fixes $(1 \pm \sqrt{5})/2$. Il n'y en a qu'un seul qui se trouve dans l'intervalle, on peut alors conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

(5) C'est une récurrence. Si l'initialisation ne pose pas de problème, c'est le caractère héréditaire de la propriété ici qui nécessite du travail. Plus précisément, comment passer d'un écart entre u_n et la limite (qu'on connait par hypothèse de récurrence) à un écart entre u_{n+1} et la limite ? C'est ce que permet de faire l'**inégalité des accroissements finis** (IAF). Ici, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1;2]$ où vivent tous les termes de la suite ainsi que la limite; on connait aussi la dérivée de f dont on doit estimer la variation maximale sur l'intervalle. On a

$$\forall x \in [1;2], \qquad \leq f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{4}$$

ce qui donne

$$\forall x \in [1;2], \qquad |f'(x)| \leq \frac{1}{4}$$

et donc, l'IAF permet d'obtenir[2]

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{1}{4} \cdot |u_n - \ell|,$$

ce qui permet d'obtenir par une récurrence immédiate, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(6) L'inégalité précédente est utile, en plus de savoir que (u_n) converge vers ℓ, on connait la vitesse, c'est à dire qu'on connait l'écart entre u_n et la limite en fonction du rang n. Si on veut une approximation de ℓ, il suffit de prendre u_n avec n assez grand. Ici, on ne demande que le rang et pas le terme de la suite. Comme le contrôle de l'écart ne dépend que de n, il n'y a même pas besoin de calculer les termes de la suite! Le programme ultra-classique est alors le suivant

```
N=0 // initialisation
while (1/4)^N >= 10^(-3) //tant que c'est trop grand
    N=N+1 //on calcule l'entier suivant
end
disp(N) //on affiche le résultat
```

[2] Cela marche bien car $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\ell) = \ell$

Exercice 1

Cet exercice provient du Concours Blanc de première année (Juin 2021).

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

(1) (a) On commence par calculer explicitement la matrice $A - 3I$;

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

On observe que $(A - 3I)^2 = 0$.

(b) Comme A et $3I$ **commutent**[3], on peut aussi développer la relation précédente

$$0 = (A - 3I)^2 = A^2 - 6A + 9I$$

ou encore

$$9I = 6A - A^2 = A(6I - A) \iff A\left(\frac{1}{9}(6I - A)\right) = I$$

on en conclut que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{9}(6I - A).$$

(2) On note $F = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \; AX = 3X\}$.

(a) F est bien un espace vectoriel. En effet,

- Il est non vide : $0 \in F$: $A \cdot 0 = 0 = 3 \cdot 0$.
- Il est stable par combinaison linéaire: soient $X, Y \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\begin{aligned} A(\lambda X + \mu Y) &= \lambda AX + \mu AY \\ &= \lambda 3X + \mu 3Y \qquad (\text{ car } X, Y \in F) \\ &= 3(\lambda X + \mu Y) \end{aligned}$$

et donc $\lambda X + \mu Y \in F$, qui est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel.

[3]argument capital pour le développement!

(b) On résout. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in F &\iff AX = 3X \\ &\iff (A-3I)X = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2x - y + 2z &=& 0 \\ -4x - 2y + 4z &=& 0 \\ -4x - 2y + 4z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = 2z - 2x \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 2z-2x \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En posant

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a bien $F = \mathrm{Vect}(U, V)$.[4]

(c) En tant que sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel. La famille (U, V) est **génératrice** de F. Comme ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires[5], elle forme aussi une **famille libre** et donc une base de F.

(3) On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Pour ce faire, on procède par la méthode du pivot de Gauss simultané.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 + L_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Ceci permet d'écrire que P est inversible et que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) On vérifie bien, par le calcul, que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) C'est une récurrence:

[4] A noter qu'en exprimant x en fonction de y et z ou z en fonction de x et y, on obtenait des U et V différents.

[5] On rappelle que la notion de colinéarité ne s'applique que pour des familles de deux vecteurs

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a bien $A^0 = I$ et $T^0 = I$, ce qui donne $P^{-1}A^0P = P^{-1}IP = P^{-1}P = I = T^0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $P^{-1}A^nP = T^n$. Alors,
$$T^{n+1} = T \cdot T^n = P^{-1}AP \cdot P^{-1}A^nP = P^{-1}A \cdot A^nP = P^{-1}A^{n+1}P,$$
ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(4) (a) La matrice cherchée est
$$N = T - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) On constante sans difficulté que $N^2 = 0$. Une récurrence immédiate donne $N^k = 0$ pour $k \geq 2$. En effet, si $N^k = 0$, alors $N^{k+1} = N \cdot N^k = N \cdot 0 = 0$.

(c) On a, par définition, $T = N + 3I$ et bien entendu, N et $3I$ **commutent**. On peut donc appliquer la formule du binôme qui a le bon goût de vite se simplifier car beaucoup de termes disparaissent du fait que $N^k = 0$ à partir de $k = 2$. Plus précisément,
$$\begin{aligned} T^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (3I)^{n-k} N^k \\ &= \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} (3I)^{n-k} N^k \\ &= \binom{n}{0} (3I)^n N^0 + \binom{n}{1} (3I)^{n-1} N^1 \\ &= 3^n I + n3^{n-1} N \end{aligned}$$

(d) Comme $N = T - 3I$, la formule précédente donne
$$T^n = 3^nI + n3^{n-1}N = 3^nI + n3^{n-1}(T - 3I) = 3^n(1-n)I + n3^{n-1}T.$$

(5) (a) C'est le truc classique: on passe d'une relation sur T^n à une relation sur A^n en multipliant par P et P^{-1} sur les côtés.
$$\begin{aligned} A^n &= PT^nP^{-1} = P\left(3^n(1-n)I + n3^{n-1}T\right)P^{-1} \\ &= 3^n(1-n)PIP^{-1} + n3^{n-1}PTP^{-1} \\ &= n3^{n-1}A - (n-1)3^nI. \end{aligned}$$

(b) Pour $n = -1$, la formule ci-dessous donnerait
$$-3^{-2}A + 23^{-1}I = -\frac{1}{9}A + \frac{2}{3}I = A^{-1},$$
ce qui est bien vrai d'après la question ($1b$).
On laisse au lecteur le plaisir de montrer qu'en fait la formule est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

Cet exercice est inspiré d'un exercice d'oral de l'ESM.

Soit $p \in]0;1[$. On dispose d'une pièce de monnaie qui amène *Pile* avec la probabilité p, et *Face* avec la probabilité $1-p$.

On lance la pièce jusqu'à obtenir pour la seconde fois *Pile*. On note X la variable aléatoire égale au nombre de *Face* obtenus au cours des lancers. On suppose que la variable X est définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Par exemple, si les lancers donnent successivement *Pile-Pile*, alors $X = 0$, et si les lancers donnent successivement *Face-Pile-Face-Face-Pile*, alors $X = 3$.

(1) (a) L'évènement $(X = 0)$ signifie que l'on obtient aucun *Face* avant d'obtenir les deux *Pile* ce qui nécessairement impose d'obtenir deux *Pile* consécutifs aux deux premiers lancers. En notant, pour toute la suite de l'exercice P_i (resp. F_i) "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $i-$ème lancer", on peut écrire

$$\begin{aligned} P(X=0) &= P(P_1 \cap P_2) = P(P_1)P(P_2) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= p^2 \end{aligned}$$

Concernant $(X = 1)$, il est bon de remarquer que le dernier lancer étant celui où on s'arrête, il amène nécessairement un *Pile*. Ainsi, le seul *Face* obtenu arrive au premier ou au second lancer, les deux alternatives étant incompatibles on a

$$\begin{aligned} P(X=1) &= P([P_1 \cap F_2 \cap P_3] \cup [F_1 \cap P_2 \cap P_3]) \\ &= P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) + P(F_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= p(1-p)p + (1-p)p^2 \\ &= 2(1-p)p^2 \end{aligned}$$

(b) De façon générale, dire que $(X = k)$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) signifie qu'on a obtenu k fois *Face* et deux fois *Pile*, mais le second *Pile* est nécessairement le dernier lancer. Ainsi, il y a un seul *Pile* (et k *Face*) au cours des $k+1$ premiers lancers. Chacune de ces issues a la même probabilité $(1-p)^k p^2$ de se produire, il suffit de compter qu'il y en a $k+1$ (qui correspond au façons de placer le premier *Pile* au cours des $k+1$ premiers lancers). Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P(X=k) &= P\left([P_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}] \cup \right. \\ &\qquad \left. \cup [F_1 \cap P_2 \cap F_3 ... \cap F_{k+1} \cap P_{k+2}] \cup \cdots \cup [F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_k \cap P_{k+1} \cap P_{k+2}]\right) \\ &= (k+1)(1-p)^k p^2. \end{aligned}$$

(c) On commence par voir que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X=k) = (k+1)(1-p)^k p^2 = p^2(1-p) \times k(1-p)^{k-1} + p^2 \times (1-p)^k$$

et on reconnait la combinaison des termes généraux de la série géométrique et de sa dérivée de raison $(1-p)$ donc convergente. Ainsi, la série de terme général $P(X = k)$ converge et on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) &= p^2(1-p) \sum_{k=0}^{+\infty} k(1-p)^{k-1} + p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^k \\ &= p^2(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-p))^2} + p^2 \times \frac{1}{(1-(1-p))} \\ &= (1-p) + p = 1, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(2) Notant A l'évènement « on n'obtient jamais deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers de la pièce », il est clair qu'on peut écrire

$$A = \overline{\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X = k)}.$$

Il suit que

$$P(A) = 1 - P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}(X = k)\right) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 0,$$

ce qui signifie que l'évènement est négligeable ou, de manière équivalente, que *presque sûrement*, on obtiendra deux *Pile* au cours d'une infinité de lancers.

(3) La variable X admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X = k)$ converge (absolument). Ici nul besoin du caractère absolu de la convergence car tout est positif. On observe que

$$kP(X = k) = k(k+1)p^2(1-p)^k = p^2(1-p) \times k(k+1)(1-p)^{k-1},$$

et on reconnaît un multiple du terme général d'une série géométrique dérivée deux fois, décalée, de raison $1 - p$, donc convergente. Il suit que X admet une espérance et que

$$\begin{aligned} E(X) &= p^2(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty} k(k+1)(1-p)^{k-1} \\ &= p^2(1-p)\sum_{j=2}^{+\infty}(j-1)j(1-p)^{j-2} \qquad \text{(avec le changement d'indice } j = k-1) \\ &= p^2(1-p)\frac{2}{(1-(1-p))^3} \\ &= \frac{2(1-p)}{p}. \end{aligned}$$

(4) Compléter le script `SciLab` ci-dessous afin qu'il affiche une réalisation de la variable X

```
p=0.3;
S=0; n=0; //S= nombre de PILE, n=nombre de FACE
while S<2 //tant que le nombre de PILE <2
    n=n+1;  //on a un FACE de plus
    if rand()<p then //si on obtient un Pile
        S=S+1; //on a un PILE de plus
    end
end
disp(n)
```