Devoir surveillé n°1

Samedi 18 Septembre
Durée : 4 heures

Exercice 1

Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices (M_n) *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k.$$

Lorsque $(S_n(A))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^A cette limite.

Partie 1 : Premiers exemples

(1) Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

(2) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2 et A^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer A^k.

(b) Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(A)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^A.

Partie 2 : Un autre exemple

(3) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Calculer A^2.

(b) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}^*$ l'expression de A^k en fonction de k.

(c) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(A) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A.$$

(d) En déduire que e^A existe et que

$$e^A = I + \frac{e^3 - 1}{3} A.$$

Partie 3 : Une réduction et un dernier exemple

(4) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer trois vecteurs $U, V, W \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 0\} = \mathrm{Vect}(U), \qquad \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = X\} = \mathrm{Vect}(V),$$

et

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 4X\} = \mathrm{Vect}(W).$$

(b) On forme la matrice P dont les colonnes sont respectivement U, V et W. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

(c) Vérifier que la matrice $D = P^{-1}AP$ est diagonale.

(d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

(e) En déduire une expression de $S_n(A)$ en fonction de n.

(f) Conclure que e^A existe et l'expliciter.

(5) (*) Plus généralement, si A est une matrice diagonalisable, que dire de e^A?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction F définie sur $]-1;+\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I - Étude de la fonction f

(1) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

(2) Déterminer les variations de f, présentées sous forme d'un tableau.

Partie II - Étude de la fonction F

(3) Justifier que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > -1$ et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

(4) À l'aide du changement de variable $u = t + 1$, montrer que, pour tout $x > -1$,
$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

(5) À l'aide d'équivalents, déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

(6) (a) Étudier la concavité de F. On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
   (b) Montrer que, pour tout $x > -1$ non nul, $F(x) > 0$.

(7) Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $1/(1+x)$. En déduire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre 2 en 0.

(8) Préciser l'équation de la tangente à la courbe de F en 0 et leurs positions relatives.

(9) Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0.

Partie III - Étude de la suite (u_n)

(10) Calculer u_1 et u_2.

(11) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.

(12) En déduire la convergence de (u_n) vers une limite à préciser.

(13) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(14) (a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, $\quad \dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.
   (b) En déduire que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

(15) Montrer que
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

(16) (*) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 3

On lance indéfiniment une pièce donnant *Pile* avec probabilité p et *Face* avec probabilité $q = 1-p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants.
On dit que le $k-$ième lancer est un *changement* s'il amène un résultat différent du $(k-1)-$ième lancer.
On note P_k (resp. F_k) l'évènement "on obtient *Pile* (resp. *Face*) au $k-$ième lancer.
Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on introduit la variable aléatoire X_n égale au nombre de changements survenus lors des n premiers lancers.
Par exemple, si on obtient *Face-Face-Face-Pile-Face-Pile-Pile-Face*, on a $X_2 = X_3 = 0$, $X_4 = 1$, $X_5 = X_6 = 2$ et $X_7 = 3$.
On introduit également la variable aléatoire Z_n égale au nombre de *Pile* obtenus lors des n premiers lancers.

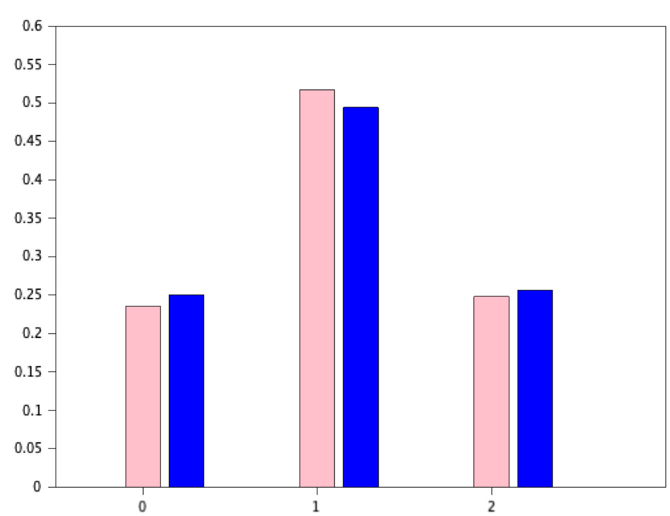
Partie 1 : Premières observations et simulations sous `SciLab`

(1) Reconnaître la loi de Z_n. Préciser son espérance et sa variance.
(2) Même question avec X_2.
(3) Écrire une fonction d'en-tête `function y=lancer(p)` qui simule le lancer de la pièce et renvoie la valeur 1 si on obtient *Pile* et 0 si on obtient *Face*.
(4) Écrire ensuite une fonction d'en-tête `function y=Z(n, p)` renvoie une simulation de Z_n.
(5) Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle renvoie une simulation de X_n.

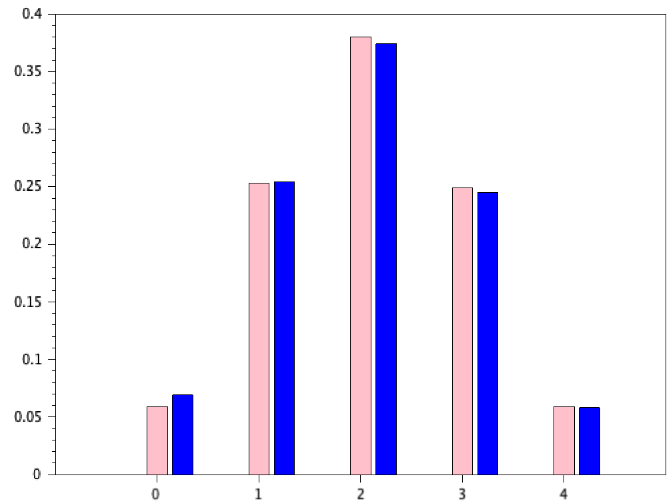
```
function chgt=X(n,p)
    lancer_old=lancer(p)
    chgt=0
    for k=...........
        lancer_new=.........
        if ................. then
            chgt = ..................
        end
        lancer_old=..............
    end
endfunction
```

(6) On propose quelques scripts ainsi que les figures qu'ils permettent d'obtenir. Que peut-on conjecturer quant à la loi de X_n? Sous quelle condition?

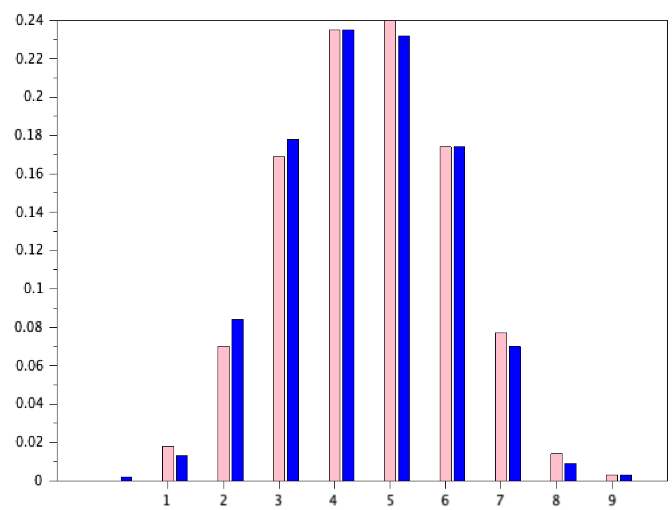
```
p=1/2
L=zeros(1,1000)
M=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    L(k)=X(3,p)
    M(k)=Z(2,p)
end
T=tabul(L, 'i')
U=tabul(M, 'i')
bar(U(:,1)+0.25, U(:,2)/1000, width=.2)
 // +0.25 lisibilité
bar(T(:,1), T(:,2)/1000, width=.2, '
pink')
```



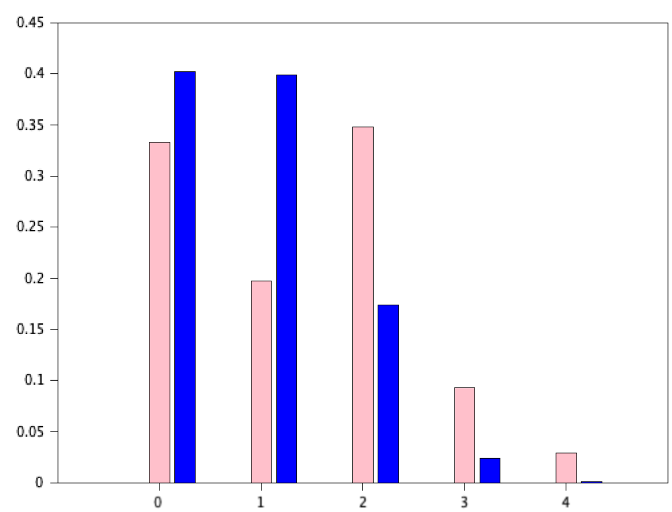
```
p=1/2
L=zeros(1,1000)
M=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    L(k)=X(5,p)
    M(k)=Z(4,p)
end
T=tabul(L, 'i')
U=tabul(M, 'i')
bar(U(:,1)+0.25, U(:,2)/1000, width=.2)
 // +0.25 lisibilité
bar(T(:,1), T(:,2)/1000, width=.2, '
pink')
```




```
p=1/2
L=zeros(1,1000)
M=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    L(k)=X(10,p)
    M(k)=Z(9,p)
end
T=tabul(L, 'i')
U=tabul(M, 'i')
bar(U(:,1)+0.25, U(:,2)/1000, width=.2)
 // +0.25 lisibilité
bar(T(:,1), T(:,2)/1000, width=.2, '
pink')
```




```
p=1/5
L=zeros(1,1000)
M=zeros(1,1000)
for k=1:1000
    L(k)=X(5,p)
    M(k)=Z(4,p)
end
T=tabul(L, 'i')
U=tabul(M, 'i')
bar(U(:,1)+0.25, U(:,2)/1000, width=.2)
 // +0.25 lisibilité
bar(T(:,1), T(:,2)/1000, width=.2, '
pink')
```



☞ *Remarque.* Le paramètre `width=0.2` en troisième argument de la commande `bar( )` permet d'avoir des bâtons plus fins. De plus, pour des soucis de lisibilité, on présente les bâtons à confronter en parallèle, ce qu'on fait en décalant les valeurs de la première série de 0.25.

(7) (a) Déterminer la loi de X_3. *On utilisera des descriptions avec les évènements* P_k et F_k.
(b) Montrer que
$$E(X_3) = 4pq, \quad \text{et} \quad V(X_3) = 2pq(3 - 8pq).$$

(8) (a) Déterminer la loi de X_4.
(b) Calculer $E(X_4)$.

Partie 2 : Étude du cas où $p \neq q$

Dans toute cette partie, et dans cette partie uniquement, on suppose que $p \neq q$ (en particulier $p \neq 1/2$ et $q \neq 1/2$).

(9) Déterminer, pour tout $n \geq 2$, $P(X_n = 0)$ en fonction de n, p et q.

(10) En découpant soigneusement l'évènement $(X_n = 1)$ à l'aide d'évènements incompatibles, montrer que
$$P(X_n = 1) = \frac{2pq}{q-p}\left(q^{n-1} - p^{n-1}\right).$$

(11) En distinguant les cas n pair et n impair, déterminer $P(X_n = n-1)$.

(12) Les deux dernières questions sont-elles compatibles avec les résultats précédemment obtenus (à la Question 7a) quant à la loi de X_3?

(13) On introduit la variable S_k qui prend la valeur 1 si le $k-$ième lancer est un changement et 0 sinon.
(a) À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que S_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $2pq$.
(b) Exprimer X_n à l'aide des variables S_k. En déduire $E(X_n)$.

Partie 3 : Étude du cas où $p = q$

Dans cette dernière section, on suppose que $p = q = 1/2$.

(14) Vérifier, à laide des résultats de la Partie 1 que X_3 et X_4 suivent des lois binomiales dont on précisera les paramètres.

(15) Montrer par récurrence que X_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(16) Les résultats obtenus sont-ils compatibles avec ceux conjecturés dans la Partie 1?