ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°1

Samedi 18 Septembre
Solution

Exercice 1

*Cet exercice, qui introduit sans la nommer, la notion d'exponentielle de matrices, s'inspire de plusieurs vieux sujets de concours, de difficultés diverses et variées, comme par exemple le sujet **HEC 2007**, voie **T**.*

Partie 1 : Premiers exemples

(1) Soit $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Comme D est diagonale, le calcul de ses puissances ne pose aucun problème. On a en effet, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \begin{pmatrix} a^k & 0 & 0 \\ 0 & b^k & 0 \\ 0 & 0 & c^k \end{pmatrix}.$$

De sorte que

$$S_n(D) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c^k}{k!} \end{pmatrix}.$$

On reconnait alors sur la diagonale les sommes partielles de trois séries exponentielles de paramètres respectifs a, b et c qui convergent toutes les trois respectivement vers e^a, e^b et e^c. D'après la définition de l'énoncé, on peut donc conclure que e^D existe et vaut bien

$$e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}.$$

(2) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) On fait le calcul (sans difficulté!) et on trouve

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = 0.$$

Ainsi, une récurrence immédiate permet d'obtenir $A^k = 0$ pour $k \geq 3$.
Si la récurrence est en effet facile et immédiate, on la fera quand même apparaître *en appréciation avec le niveau de rédaction de la production rendue*:

- Pour $n = 3$, on a bien $A^3 = 0$.
- Si $A^k = 0$ pour un certain $k \geq 3$, alors $A^{k+1} = A \cdot A^k = A \cdot 0 = 0$.

(b) Il suit que, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{1}{k!} A^k \qquad \text{(car } A^k = 0 \text{ pour } k \geq 3\text{)} \\ &= I + A + \frac{1}{2} A^2 \qquad \text{(car } A^0 = I\text{)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les coefficients de $S_n(A)$ sont constants. et admettent donc chacun une limite en $+\infty$ égale à la valeur de la constante. On peut donc conclure ici que e^A existe et que (pour tout $n \geq 2$)

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = S_n(A).$$

Partie 2 : Un autre exemple

(3) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(a) Le calcul donne $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3A$.

(b) On a déjà rencontré quasiment le même exercice lors des révisions de rentrées. Il est relativement naturel de déduire de la relation précédente (sinon, on essaie de calculer d'autres puissances pour se donner l'idée) que, pour tout $k \geq 1$

$$A^k = 3^{k-1} A.$$

On le montre par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $k = 1$, on a bien $A = 3^0 A$.

- hérédité. Si $A^k = 3^{k-1}A$ pour un certain $k \geq 1$, alors

$$A^{k+1} = A \cdot A^k \underset{\text{(HR)}}{=} A \cdot 3^{k-1}A = 3^{k-1}A^2 = 3^{k-1} \times 3A = 3^k A,$$

ce qui est bien la relation au rang $k+1$ et termine la récurrence.

(c) On va utiliser la relation précédente pour remplacer A^k dans le calcul de $S_n(A)$. Attention cependant, cette formule n'est valable que pour $k \geq 1$, et la somme définissant $S_n(A)$ commence à $k = 0$. Naturellement, on veut essayer, dans la somme ainsi transformée de faire apparaître une série exponentielle *réelle* de paramètre 3.

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}A^k = I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}A^k \\ &= I + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}3^{k-1}A = I + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}3^k A \\ &= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - \frac{3^0}{0!}\right) A \\ &= I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) A, \end{aligned}$$

comme demandé.

(d) Chaque coefficient de la matrice $S_n(A)$ est donc égal, selon s'il est sur la diagonale ou non,)

$$1 + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right).$$

Comme, en ayant reconnu une somme partielle de série exponentielle, on a

$$\frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\left(e^3 - 1\right),$$

on en conclut que tous les coefficients de $S_n(A)$ admettent une limite. Ainsi, e^A existe et vaut

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 + \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & 1 + \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} \\ \frac{e^3-1}{3} & \frac{e^3-1}{3} & 1 + \frac{e^3-1}{3} \end{pmatrix} = I + \frac{e^3 - 1}{3}A.$$

Partie 3 : Une réduction et un dernier exemple

(4) Dans cette question, la matrice A est donnée par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) On résout! Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$
\begin{aligned}
AX = 0 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+y+z & = & 0 \\ x+y+3z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+y & = & 0 \\ z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En posant $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on a bien

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ : \ AX = 0\} = \text{Vect}(U).$$

On continue.

$$
\begin{aligned}
AX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+z & = & 0 \\ x+z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ x+y+2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \\ y+z & = & 0 \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\
&\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ y & = & -z \end{array} \right. \\
&\iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = -z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

En posant $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, on a bien

$$\{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ : \ AX = X\} = \text{Vect}(V).$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
AX = 4X &\iff \begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4x\\4y\\4z\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}-3x+y+z&=&0\\x-3y+z&=&0\\x+y-z&=&0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y-z&=&0\\x-3y+z&=&0\\-3x+y+z&=&0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}x+y-z&=&0\\4y-2z&=&0\\4y-2z&=&0\end{array}\right. \qquad \begin{array}{l}\\L_2\leftarrow L1-L_2\\L_3\leftarrow 3L_1+L_3\end{array}\\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl}x&=&z-y=2y-y=y\\z&=&2y\end{array}\right.\\
&\iff X=\begin{pmatrix}y\\y\\2y\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

En posant $W=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, on a bien

$$\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\ :\ AX=4X\}=\mathrm{Vect}(W).$$

(b) La matrice P est donc la matrice

$$P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}.$$

On montre qu'elle est inversible et on calcule son inverse à l'aide d'un pivot de Gauss *simultané*.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\-1&1&1&0&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)\underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&2&1&1&0\\0&-1&2&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\underset{L_1\leftarrow 2L_1-L_2,\ L_3\leftarrow 2L_3+L_2}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&0\\0&2&2&1&1&0\\0&0&6&1&1&2\end{array}\right)$$

$$\underset{L_2\leftarrow 3L_2-L_3}{\rightsquigarrow}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&1&-1&0\\0&6&0&2&2&-2\\0&0&6&1&1&2\end{array}\right)$$

Ainsi, P est bien inversible et

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1/2&-1/2&0\\1/3&1/3&-1/3\\1/6&1/6&1/3\end{pmatrix}.$$

(c) Le calcul, que l'on omet ici donne

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},$$

qui est bien une matrice diagonale.[1]

[1] Pour nos étudiant.e.s en *khûbe*, une formule de changement de base en ayant précisé que P était une matrice de passage vers une base de vecteurs propres convenait. D'ailleurs on pouvait aussi citer un argument de concaténation pour justifier de l'inversibilité de P...

(d) C'est une récurrence facile mais qui ici est demandée explicitement donc qu'on ne néglige pas. Comme $D = P^{-1}AP$, on a $A = PDP^{-1}$.

- initialisation. Pour $n = 0$, comme $A^0 = D^0 = I$, on a bien $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I = A^0$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors,
$$A^{n+1} = A \cdot A^n \underset{\text{(HR)}}{=} PDP^{-1} \cdot PD^nP^{-1} = PD \cdot D^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$
ce qui est bien la relation au rang $n + 1$ et termine la récurrence.

(e) On injecte les résultats précédents, notamment le calcul de $S_n(D)$ pour une matrice D diagonale de la toute première question de cet exercice.

$$\begin{aligned} S_n(A) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} PD^nP^{-1} \\ &= P\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D^k\right) P^{-1} = PS_n(D)P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!} \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

(f) Le passage à la limite coefficient par coefficient existe, tout comme e^A et donne alors
$$e^A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{pmatrix} P^{-1}.$$
On pouvait raisonnablement s'arrêter là.

(5) (*) Si A est une matrice diagonalisable, il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En reprenant exactement les étapes de la question précédente (qui en était un exemple), on peut conclure que e^A existe et que
$$e^A = Pe^DP^{-1}.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction F définie sur $]-1; +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I - Étude de la fonction f

(1) En $\pm\infty$, on a

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} (x+1)^2 = 0^+,$$

il suit que

$$\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = -\infty.$$

(2) En dehors de -1, f est dérivable comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

dont le signe se détermine facilement et permet de dresser le tableau de variations ci-dessous

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Partie II - Étude de la fonction F

(3) La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$. Par le théorème fondamental de l'analyse, $F(x)$ est alors bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et est **la** primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F et dérivable sur $]-1;+\infty[$, $F'(x) = f(x)$ et f étant continue, F' l'est ce qui donne bien F de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

(4) Le changement de variable $u = t+1$ est affine donc licite; il donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^{x}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= [\ln(u)]_1^{x+1} + \left[\frac{1}{u}\right]_1^{x+1} \\ &= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(5) Comme $x \sim x+1$ (pour $x \to +\infty$), et que $\ln(x+1) = \ln(x) + \ln(1+1/x) \sim \ln(x) \to +\infty$, il est clair que

$$\frac{x}{x+1} = o(\ln(x)),\ x \to +\infty$$

et donc

$$F(x) \sim \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par ailleurs,
$$F(x) = -\frac{1}{x+1}\left(1-(x+1)\ln(x+1)\right) \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} -\infty$$
car $(x+1)\ln(x+1) \to 0$ par croissance comparée.

(6) (a) Comme f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$, F est finalement de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et sa concavité est caractérisée par le signe de sa dérivée seconde, égale à $f'(x)$, dont on connait le signe par la première partie de l'exercice. Plus précisément,
- $F''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=1$ et admet un (unique) point d'inflexion d'abscisse $x=1$ et d'ordonnée $y=F(1)=\ln(2)-1/2 \simeq 0,19$;
- $F''(x)>0$ sur $]-1;1[$ donc F y est convexe;
- F est alors concave sur $]1;+\infty[$

(b) Sur $]-1;1[$, F est convexe donc la courbe de F est au dessus de ses tangentes (sur ce même intervalle). LA tangente en 0 a pour équation $y=f(0)x+F(0)=0$. Ainsi, $F(x)\geq 0$ sur $]-1;1[$ mais en fait, le seul point d'égalité est le point de tangence ($x=0$) donc pour $x\in]-1;1[$, $F(x)>0$.

Sur $[1;+\infty[$, $F'(x)=f(x)\geq 0$ donc F est croissante et donc $F(x)\geq F(1)=\ln(2)-1/2>0$. Au final, pour tout $x\in]-1;+\infty[$ non nul, on a bien $F(X)>0$.

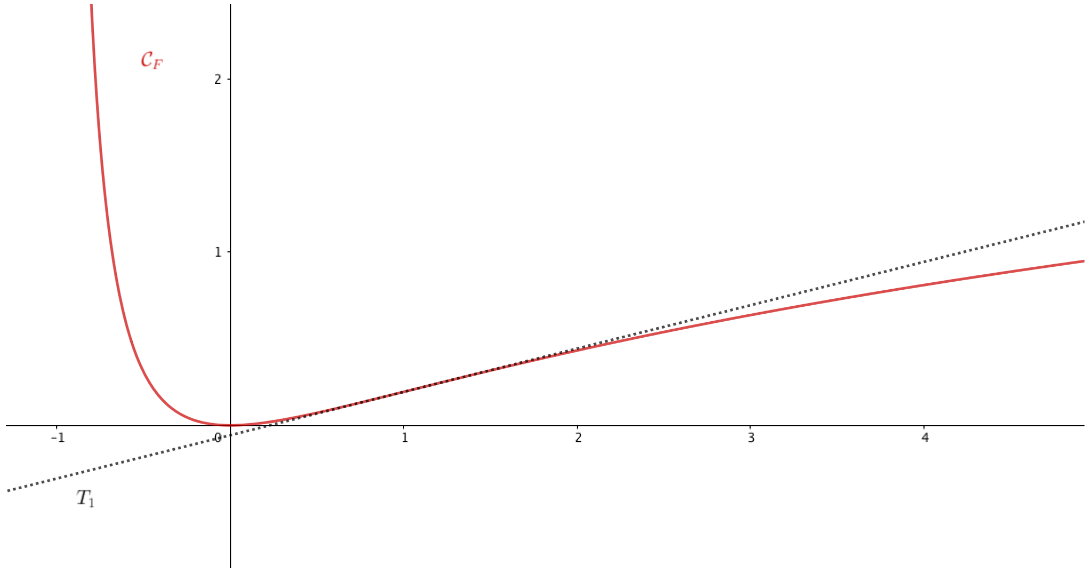
(7) On rappelle les DL usuels en 0 à l'ordre 2
$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2), \qquad \frac{1}{1+x} = 1-x+x^2+o(x^2).$$
Ces DL permettent d'obtenir celui de notre fonction F en 0. En effet,
$$\begin{aligned} F(x) &= \ln(1+x)-\frac{1}{1+x} = x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x\left(1-x+x^2+o(x^2)\right) \\ &= x-\frac{x^2}{2}-x+x^2+o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2}+o(x^2). \end{aligned}$$

Remarque. On aurait aussi pu (même si la formulation de la question suggère de procéder comme ci-dessus) utiliser la formule de Taylor-Young car F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0.
$$\begin{aligned} F(x) &= F(0)+F'(0)x+\frac{F''(0)}{2!}x^2+o(x^2) = \frac{f'(0)}{2}x^2+o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2}+o(x^2). \end{aligned}$$

(8) La tangente en 0 a pour équation $y=0$ (c'est donc l'axe des abscisses). On sait déjà que la courbe de F est au dessus.

(9) On notera aussi T_1 la tangente au point d'inflexion, plus intéressante finalement que la tangente en 0, permettant notamment de visualiser le changement de convexité. On peut commencer par faire apparaître le tableau de variations de F même s'il n'est pas explicitement demandé, il permet un tracé plus facile.

x	-1		0		$+\infty$
$F'(x)$	||	$-$	0	$+$	
F	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Partie III - Étude de la suite (u_n)

(10) Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1/(1+1)^2 = 1/4$. Puis,

$$u_2 = f(u_1) = f(1/4) = \frac{1/4}{(1+1/4)^2} = \frac{4}{25}.$$

(11) On procède donc par récurrence, comme demandé.

- initialisation. Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1/4 \leq 1 = 1/1$ et $u_1 > 0$. Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1/n$. Comme f est strictement croissante entre $]-1;1[$ dont 0, u_n et $1/n$ sont des éléments donc

$$0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{(1+1/n)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $n/(n+1) \leq 1$.

Ainsi la récurrence est bien démontrée.

(12) Par le théorème des gendarmes, il suit de l'encadrement précédent que u_n converge vers 0.

(13) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Commençons par voir que

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2u_n}{u_n} = u_n + 2$$

ce qui donne, d'après l'encadrement de u_n ci-dessus, l'encadrement voulu:

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

(b) Comme on a l'habitude et qu'on est quand même, ne nous mentons pas, bien préparés, on reconnait une somme télescopique. On somme donc l'encadrement précédent.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}$$

Mais,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{k}\right) = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}\right)\geq\sum_{k=1}^{n-1}2=2(n-1).$$

Ainsi,

$$2n-2\leq\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_1}\leq 2n-2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$$

mais comme $1/u_1=4$, on obtient bien

$$2(n+1)\leq\frac{1}{u_n}\leq 2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}.$$

(14) (a) On a déjà répondu, en classe, à la maison ou ailleurs plusieurs fois à cette question. La fonction $t\mapsto 1/t$ est décroissante sur l'intervalle $[k-1;k]$, et par positivité de l'intégrale on a

$$\forall t\in[k-1;k],\quad \frac{1}{t}\geq\frac{1}{k}\qquad\Longrightarrow\qquad\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}\geq\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{k}=\frac{1}{k}\int_{k-1}^{k}\mathrm{d}t=\frac{1}{k}.$$

(b) On somme et on utilise la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{+}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}=1+\int_{1}^{n}\frac{\mathrm{d}t}{t}=1+\ln(n).$$

(15) En combinant (13)(b) et (14)(b), on a

$$2(n+1)\leq\frac{1}{u_n}\leq 2(n+1)+1+\ln(n)$$

Ainsi, en multipliant par $1/(2n)$, on a

$$1+\frac{1}{n}\leq\frac{1/(2n)}{u_n}\leq 1+\frac{1}{n}+\frac{\ln(n)}{2n}$$

et le théorème des gendarmes donne alors la limite du quotient égale à 1, ou encore

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}.$$

(16) La série de terme général $1/(2n)$ est divergente (c'est le multiple du terme général de la série harmonique, exemple de série de Riemann divergente). Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut également conclure à la divergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 3

Cet exercice est inspiré par ***EDHEC 2000*** *mais naturellement bien augmenté, notamment concernant toute la partie* `SciLab` *qu'on apprécie.*

Partie 1 : Premières observations et simulations sous `SciLab`

(1) La variable Z_n compte le nombre de *succès* (obtenir un *Pile*) lors de n répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli (lancer d'une pièce). On reconnait donc une loi binomiale. Plus précisement,

$$Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$$

Le cours nous permet d'affirmer (sans démonstration) que

$$E(Z_n) = np, \qquad V(Z_n) = npq.$$

(2) X_2 compte le nombre de changement après deux lancers. On comprend alors qu'après deux lancers, on a pu avoir ou bien deux fois la même face (et donc aucun changement), ou bien deux faces différentes (et donc un changement). Ainsi, $X_2(\Omega) = \{0;1\}$ et X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre

$$P(X_2 = 1) = P(P_1 \cap F_2 \cup F_1 \cap P_2) = P(P_1)P(F_2) + P(F_1)P(P_2) = pq + qp = 2pq,$$

où le calcul s'appuie sur le fait que les deux alternatives ci-dessus sont disjointes et les lancers indépendants. On a alors

$$X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(2pq).$$

Le cours permet d'affirmer directement que

$$E(X_2) = 2pq, \qquad V(X_2) = 2pq(1-2pq).$$

(3) Il s'agit ici d'écrire une fonction qui simule une variable de Bernoulli de paramètre p. On l'a justement vu en TP. On accepte un programme qui utilise la commande `grand( )` même si on propose ici le programme suivant

```
function y=lancer(p)
    if rand( ) < p then //si Pile
        y=1
    else //sinon
        y=0
    end
endfunction
```

(4) Tout ça reste classique et encore une fois on peut aller chercher la commande `grand( )` pour simuler la binomiale.

```
function y=Z(n,p)
    y=0 // on commence avec zero succes
    for k=1:n // on va lancer n fois
        if rand( ) < p then // si succes
            y=y+1 // un succès de plus
        end
    end
endfunction
```

(5) Dans ce troisième programme, comme on veut compter les changements, il faut garder en mémoire le résultat des deux derniers lancers pour les comparer, ce que le programme introduit de manière assez intuitive avec les variables `lancer_old` et `lancer_new`.

```
function chgt=X(n,p)
    lancer_old=lancer(p)
    chgt=0
    for k=2:n // à partir du 2ème jusqu'au n-ième
        lancer_new=lancer(p) // un nouveau lancer
        if lancer_new <> lancer_old then //si les lancers sont différents
            chgt = chgt +1 // un changement de plus
        end
        lancer_old=lancer_new // on écrase : le dernier devient avant-dernier pour
le tour d'après
    end
endfunction
```

(6) Les trois premiers programmes permettent de confronter les fréquences obtenues en simulant des échantillons de taille 1000 des variables X_3 et Z_2 pour le premier, X_5 et Z_4 pour le second et X_{10} et Z_9 dans le troisième et à chaque fois dans le cas $p = 1/2$. On constate que les hauteurs des fréquences obtenues pour chaque valeur semblent les mêmes. On peut donc conjecturer que les lois suivies sont les mêmes. Comme on connait les lois de Z_2, Z_4 et Z_9 qui sont binomiales, on peut alors conjecturer que **dans le cas** $p = 1/2$, X_3 suit une binomiale de paramètre $\mathcal{B}(2, 1/2)$, $X_5 \hookrightarrow \mathcal{B}(4, 1/2)$ et $X_{10} \hookrightarrow \mathcal{B}(9, 1/2)$. Plus généralement, on pourrait conjecturer que, pour $p = 1/2$,

$$X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n-1, 1/2).$$

Pour $p \neq 1/2$ on a un exemple (avec $p = 1/5$) où les bâtons n'ont pas du tout la même hauteur et on ne peut alors rien conjecturer du tout.

(7) (a) Avec 3 lancers, on peut avoir aucun changement (toujours la même face de la pièce), un changement ou au plus deux changements. Donc $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(P_1)P(P_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= q^3 + p^3 \end{aligned}$$

Si on a deux changement, on change de face de la pièce à chaque lancer.

$$\begin{aligned} P(X_3 = 2) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3) \\ &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\ &= P(F_1)P(P_2)P(F_3) + P(P_1)P(F_2)P(P_3) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= qpq + pqp = pq(q+p) = pq \qquad (\text{car } p + q = 1) \end{aligned}$$

On en déduit

$$P(X_3 = 1) = 1 - P(X_3 = 0) - P(X_3 = 2) = 1 - pq - q^3 - p^3.$$

(b) La loi de X_3 est *finie*, elle admet espérance et variance. Pour simplifier les calculs, il est bon d'avoir en tête les relations suivantes

$$(p+q) = 1, \qquad 1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2, \qquad 1 = (p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3.$$

On calcule

$$\begin{aligned}
E(X_3) &= 0 \times P(X_3 = 0) + 1 \times P(X_3 = 1) + 2 \times P(X_3 = 2) \\
&= 1 - pq - q^3 - p^3 + 2pq \\
&= 1 + pq - q^3 - p^3 = 3p^2q + 3q^2p + pq \\
&= pq(3p + 3q + 1) = pq(3p + 3q + p + q) = pq(4p + 4q) = 4pq(p + q) \\
&= 4pq,
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Ouf! Laborieux. Il y avait sans doute un chemin un peu plus court vers ce résultat... Pour la variance, afin d'utiliser König-Huygens, on calcule l'espérance de X_3^2. C'est parti.

$$\begin{aligned}
E(X_3^2) &= 0^2 \times P(X_3 = 0) + 1^2 \times P(X_3 = 1) + 2^2 \times P(X_3 = 2) \\
&= 1 - pq - q^3 - p^3 + 4pq \\
&= 3q^2p + 3p^2q + 3pq = 3pq(q + p + 1) \\
&= 6pq
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = 6pq - 16p^2q^2 = 2pq(3 - 8pq).$$

(8) (a) Avec le même raisonnement que précédemment, en 4 lancers, on peut avoir entre 0 et 3 changements donc $X_4(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$. Comme précédemment, les deux cas extremaux sont les plus faciles à exprimer et obtenir. On a

$$\begin{aligned}
P(X_4 = 0) &= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4 \cup P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \\
&= P(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) + P(P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= P(F_1)P(F_2)P(F_3)P(F_4) + P(P_1)P(P_2)P(P_3)P(P_4) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= q^4 + p^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X_4 = 3) &= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4 \cup P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \\
&= P(F_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap P_4) + P(P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap F_4) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= P(F_1)P(P_2)P(F_3)P(P_4) + P(P_1)P(F_2)P(P_3)P(F_4) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= qpqp + pqpq \\
&= 2p^2q^2
\end{aligned}$$

Pour avoir un seul changement, il y a de nombreux cas. On a donc une première série de *Pile* (de longueur de 1 à 3) suivie d'une série de *Face*, ou l'inverse.

$$\begin{aligned}
(X_4 = 1) = {} & (P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (P_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap F_4) \\
& \cup (F_1 \cap P_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4).
\end{aligned}$$

Le calcul des probabilités, avec les mêmes arguments que précédemment, donne

$$\begin{aligned}
P(X_4 = 1) &= pq^3 + p^2q^2 + p^3q + qp^3 + q^2p^2 + q^3p \\
&= 2pq(q + pq + p) \\
&= 2pq(1 + pq)
\end{aligned}$$

On déduit

$$\begin{aligned}
P(X_4 = 2) &= 1 - q^4 - p^4 - 2pq(1 + pq) - 2p^2q^2 \\
&= 1 - q^4 - p^4 - 2pq
\end{aligned}$$

Ces calculs sont quand même un peu lourds...

(b) On remonte ses manches et on y va.

$$\begin{aligned}
E(X^4) &= 2pq(1+pq) + 2\left(1 - q^4 - p^4 - 2pq\right) + 3\left(2p^2q^2\right) \\
&= 2pq + 2p^2q^2 + 2pq - 2pq(p^4+q^4) - 4pq + 6p^2q^2 \\
&= 8p^2q^2 - 2pq(p^4+q^4) \\
&= 2pq(4pq - p^4 - q^4)
\end{aligned}$$

Partie 2 : Étude du cas où $p \neq q$

Dans toute cette partie, et dans cette partie uniquement, on suppose que $p \neq q$ (en particulier $p \neq 1/2$ et $q \neq 1/2$).

(9) Soit $n \geq 2$. Si on a aucun changement on a eu ou bien n *Pile* consécutifs ou bien n *Face* consécutifs. On peut alors écrire

$$(X_n = 0) = \left(\bigcap_{k=1}^{n} P_k\right) \cup \left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right).$$

Par incompatibilité puis par indépendance des lancers, on obtient (ce qui généralise les calculs précédents)

$$P(X_n = 0) = p^n + q^n.$$

(10) Cette question est plus difficile; il suffit de voir ce qu'on a du faire pour $(X_4 = 1)$ qu'il faut maintenant généraliser. C'est à dire qu'on a une première série (de *Pile* ou de *Face*) de longueur entre 1 et $n-1$ et une deuxième série avec l'autre face de la pièce. Ceci s'écrit

$$(X_n = 1) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \left(\left[\left(\bigcap_{k=1}^{k} P_k\right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} F_k \right] \cup \left[\left(\bigcap_{k=1}^{k} F_k\right) \cap \bigcap_{k=j+1}^{n} P_k \right] \right)$$

La première réunion représente les longueurs possibles de la première série de mêmes faces obtenues. Par incompatibilité puis par indépendance,

$$\begin{aligned}
P(X_n = 1) &= \sum_{j=1}^{n-1} \left(p^k q^{n-k} + q^k p^{n-k}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n-1} p^k q^{n-k} + \sum_{j=1}^{n-1} q^k p^{n-k} \\
&= q^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^k + p^n \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k \\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}}{1 - \frac{p}{q}} + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}}{1 - \frac{q}{p}} \\
&= q^n \times \frac{p}{q} \times \frac{q}{q-p} \times \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right) + p^n \times \frac{q}{p} \times \frac{p}{p-q} \times \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{pq}{q-p} \left(q^{n-1} \left(1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right) - p^{n-1} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\right) \right) \\
&= \frac{pq}{q-p} \left(q^{n-1} - p^{n-1} - p^{n-1} + q^{n-1}\right) \\
&= \frac{2pq}{q-p} \left(q^{n-1} - p^{n-1}\right),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait et qu'on est bien content d'avoir obtenu, non sans effort. C'est une vraie question difficile et calculatoire comme il y en a de temps en temps.

(11) S'il y a $n-1$ changements en n tirages, c'est qu'on change de face de la pièce à chaque lancer.

- Si n est **pair**, il y a autant de *Pile* que de *Face*. En écrivant $n = 2m$,

$$(X_n = n-1) = \left[\bigcap_{j=1}^{m} (P_{2j-1} \cap F_{2j})\right] \cup \left[\bigcap_{j=1}^{m} (F_{2j-1} \cap P_{2j})\right]$$

  et le calcul donne

$$\begin{aligned} P(X_n = n-1) &= \prod_{j=1}^{m} pq + \prod_{j=1}^{m} qp \\ &= p^m q^m + q^m p^m = 2p^m q^m = 2(pq)^m \\ &= 2(pq)^{n/2} = 2\left((pq)^{1/2}\right)^n \\ &= 2\left(\sqrt{pq}\right)^n \end{aligned}$$

- Si n est **impair**, la face par laquelle on commence est présente une fois de plus. Notant $n = 2m+1$, on a

$$(X_n = n-1) = \left(\left[\bigcap_{j=1}^{m} (P_{2j-1} \cap F_{2j})\right] \cap P_{2m+1}\right) \cup \left(\left[\bigcap_{j=1}^{m} (F_{2j-1} \cap P_{2j})\right] \cap F_{2m+1}\right)$$

  Il suit que

$$\begin{aligned} P(X_n = n-1) &= \left(\prod_{j=1}^{m} pq\right) p + \left(\prod_{j=1}^{m} qp\right) q \\ &= p^m q^m p + q^m p^m q = p^m q^m (p+q) = (pq)^m \\ &= (pq)^{(n-1)/2} = \left((pq)^{1/2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\sqrt{pq}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

(12) Pour $n = 3$, on prend le résultat de n impair. Il est clair que les résultats des deux parties coïncident pour $P(X_3 = 0)$. De plus, n avait trouve dans la partie précédente

$$P(X_3 = 2) = pq.$$

La formule de la question précédente donne

$$P(X_3 = 2) = (pq)^{(3-1)/2} = pq,$$

et donc tout est bien compatible. Ouf, *a priori* pas d'erreur!

(13) (a) Il faut utiliser la formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{P_{k-1},\ F_{k-1}\}$. On a alors

$$\begin{aligned} P(S_k = 1) &= P_{P_{k-1}}(S_k = 1)P(P_{k-1}) + P_{F_{k-1}}(S_k = 1)P(F_{k-1}) \\ &= P_{P_{k-1}}(F_k)P(P_{k-1}) + P_{F_{k-1}}(P_k)P(F_{k-1}) \\ &= P(F_k)P(P_{k-1}) + P(P_k)P(F_{k-1}) = qp + pq \\ &= 2pq, \end{aligned}$$

ce qui est bien le résultat attendu.

(b) On compte le nombre de changements, il faut donc additionner les variables S_j. On a clairement

$$X_n = \sum_{k=1}^{n} S_k.$$

Ainsi, par linéarité de l'espérance

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(S_k) = \sum_{k=1}^{n} (2pq) = 2npq.$$

Partie 3 : Étude du cas où $p = q$

Dans cette dernière section, on suppose que $p = q = 1/2$.

(14) Pour $p = q = 1/2$, les lois obtenues pour X_3 et X_4 sont bien celles des lois binomiales de paramètres respectifs $\mathcal{B}(2, 1/2)$ et $\mathcal{B}(3, 1/2)$. En effet

$$\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

$$\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

et

$$\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right).$$

On omet la vérification pour X_4.

(15) Procédons par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 2$, on a déjà mentionné que X_2 suivait une Bernoulli de paramètre $2pq = 1/2$. C'est bien une binomiale de paramètre $n - 1$ et $1/2$.

- hérédité. On suppose que, pour un certain $n \geq 2$, $X_n \hookrightarrow B(n-1, 1/2)$. Il est alors capital d'observer qu'entre le $n-$ième lancer et le $(n+1)-$ième lancer, le nombre de changements peut rester le même ou bien augmenter de 1, ce qui se traduit par

$$P_{X_n=j}(X_{n+1} = k) = 0, \qquad \text{si} \quad j \notin \{k, k-1\}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On doit traiter le cas $k = 0$ à part car cela veut dire qu'on reste à 0 changements, mais on a déjà une formule

$$P(X_{n+1} = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n = \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour $k \geq 1$, par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X_n = j]\ j \in [\![0, n-1]\!]\}$,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{j=0}^{n-1} P_{X_n=j}(X_{n+1} = k)P(X_n = j) \\ &= P_{X_n=k-1}(X_{n+1} = k)P(X_n = k-1) + P_{X_n=k}(X_{n+1} = k)P(X_n = k) \\ &= P(S_{n+1} = 1)P(X_n = k-1) + P(S_{n+1} = 0)P(X_n = k) \\ &= \frac{1}{2}\binom{n-1}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{n}{k}, \qquad \text{(par triangle de Pascal)} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

C'était franchement difficile.

Plus simplement, il est raisonnable de penser qu'on aurait pu fournir un argument du type "à chaque lancer, la probabilité de changer est de 1/2 - peu importe le résultat obtenu au lancer précédent. Compter le nombre de changements revient donc à compter, à partir du deuxième lancer, le nombre de succès (où succès=changement) pour les $n-1$ lancers restants. C'est donc bien une binomiale de paramètre $n-1$ et $1/2$.

(16) Le résultat de la question précédente est exactement celui conjecturé grâce aux figures obtenues à la Partie 1 avec `SciLab`.