ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°2

Samedi 16 Octobre
Durée : 4 heures

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}, & \text{si } x \in]0;1[\\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction f

(1) Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

(2) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

(3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que l'on a, pour tout $x \in]0;1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x\,(1-x)\,(\ln(x))^2}\,\left(-x\,\ln(x) - (1-x)\,\ln(1-x)\right)$$

(4) (a) Justifier : $\forall t \in]0,1[,\ t\ln(t) < 0$
(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.

(5) Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

(6) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé, en faisant figurer la tangente en 0 et les branches infinies éventuelles.

Partie B : Résolution de l'équation $f(x) = x$

On introduit la fonction g définie sur $]0;1[$ par

$$g(x) = \ln(1-x) - x\ln(x).$$

(7) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ et calculer, pour $x \in]0;1[$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

(8) Dresser le tableau de variations de g'. Justifier qu'il existe un unique réel $\beta \in]0;1[$ tel que $g'(\beta) = 0$. En déduire le tableau de signe de $g'(x)$ sur $]0;1[$.

(9) Déduire de la question précédente les variations de g. Expliciter le signe de $g(\beta)$. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0;1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et qu'en plus $0 < \beta < \alpha < 1$.

(10) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0;1[$. Expliciter le tableau de signes de $f(x) - x$ sur ce même intervalle.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite (ω_n) définie par

$$\begin{cases} \omega_0 \in \,]0;1[, \\ \omega_{n+1} = f(\omega_n) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(12) Que se passe-t-il si on prend $\omega_0 = 0$ ou $\omega_0 = \alpha$?

(13) Dans cette question, on suppose que $\omega_0 \in]0, \alpha[$.

- (a) Montrer que (ω_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n \in]0; \alpha[$.
- (b) Montrer que (ω_n) est décroissante.
- (c) Montrer qu'alors (ω_n) converge vers une limite à préciser.

(14) Dans cette question, on suppose que $\omega_0 \in \,]\alpha, 1[$ et on cherche à montrer que (ω_n) **n'est pas** bien définie.

- (a) L'intervalle $]\alpha, 1[$ est-il stable par f?
- (b) On raisonne dorénavant par l'absurde et on suppose que ω_n est défini pour tout n.
  - (i) Montrer que la suite (ω_n) est croissante.
  - (ii) Montrer alors que (ω_n) diverge vers $+\infty$.
  - (iii) Conclure.
- (c) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche le premier rang n tel que ω_n est bien défini mais ω_{n+1} n'existe pas.

Partie D : Étude d'une suite implicite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

(15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

(16) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $]0, 1[$.

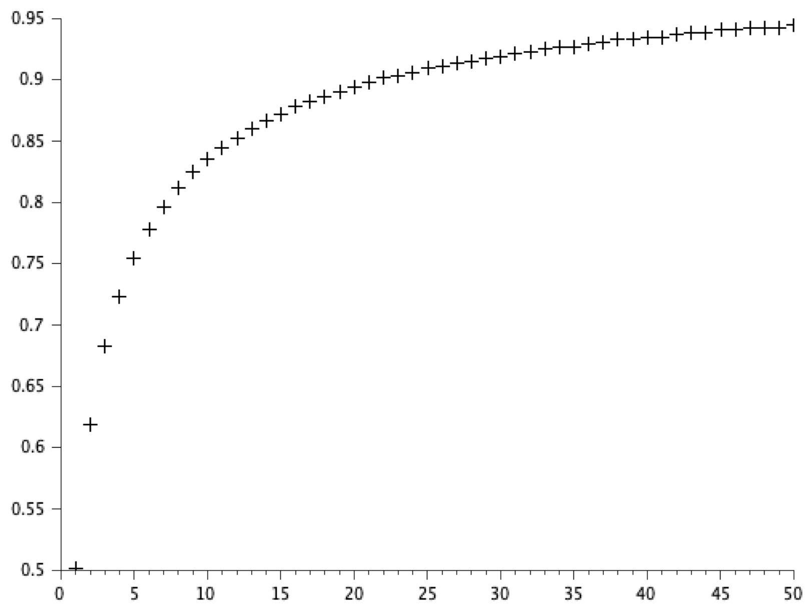
(17) Déterminer u_1 et u_2.

(18) (a) Recopier et compléter la fonction `SciLab` suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue par dichotomie.

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0
    b = 1
    while .......................
        c = (a + b) / 2
        if (c^n+c-1) > 0 then
            ...............
        else
            ...............
        end
        u = ............
    end
endfunction
```

(b) On ajoute les commandes suivantes dont l'exécution permet d'afficher la figure ci-dessous. Expliquer à quoi elles correspondent. Quelles conjectures peut-on faire sur la suite (u_n) concernant sa monotonie, sa convergence et son éventuelle limite ?

```
X=1:50
L=zeros(1,50)
for k=1:50
    L(k)=valeur_approchee(k)
end
plot2d(X,L,style=-1)
```



(19) Déterminer, pour $x \in]0;1[$, le signe de $h_{n+1}(x) - h_n(x)$. En déduire le sens de variations de (u_n).

(20) (a) Justifier de la convergence de (u_n) vers une limite $\ell \in [0;1]$.
(b) On suppose que $\ell \in [0,1[$. Vérifier que $n\ln(u_n) \to -\infty$ et en déduire la limite de u_n^n. Aboutir à une contradiction puis conclure quant à la limite de (u_n).

(21) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = n$. Retrouver alors les résultats précédents concernant la suite (u_n).

Problème 2

On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) La matrice M est-elle inversible ?
(b) (*) La matrice M est-elle diagonalisable ?
(c) Déterminer trois vecteurs V_1, V_2, V_3 tels que

$$\mathrm{Ker}(M - I) = \mathrm{Vect}(V_1), \qquad \mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{Vect}(V_2), \qquad \mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) = \mathrm{Vect}(V_3).$$

☞ *On rappelle que si A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors*

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \ AX = 0\}.$$

(d) Montrer que la famille (V_1, V_2, V_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(e) Déterminer les coordonnées (α, β, γ), dans la base (V_1, V_2, V_3), du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{ème}$ tirage".

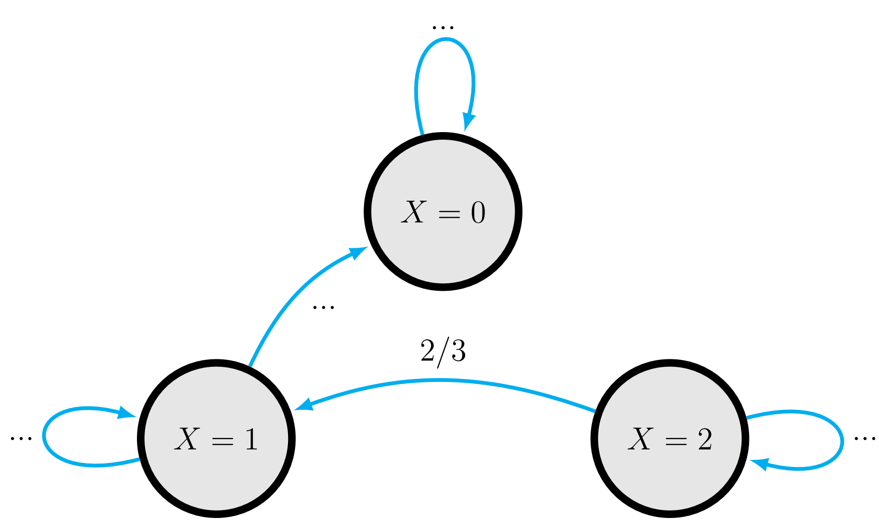
Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On introduit la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} P[X_n = 0] \\ P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \end{pmatrix}$.

(2) (a) Déterminer pour tout entier naturel n, l'ensemble des valeurs prises par la variable X_n (on distinguera les trois cas : $n = 0, n = 1$ et $n \geq 2$).

(b) Recopier et compléter **en justifiant** le *diagramme de transition* ci-contre de la suite (X_n) (pour $n \geq 2$). On précisera notamment à quelles probabilités conditionnelles correspondent les valeurs sur les flèches du diagramme.



(c) En utilisant la formule des probabilités totales avec un système complet d'évènements construit avec la variable X_n, montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a l'égalité suivante :

$$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}P(X_n = 2).$$

Montrer de même qu'on a

$$U_{n+1} = MU_n.$$

Vérifier que l'égalité précédente reste valable pour $n = 0$ et $n = 1$.

(d) Que valent MV_1, MV_2 et MV_3?

(e) En déduire par récurrence, pour tout entier naturel n, la relation suivante :

$$U_n = \alpha V_1 + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \gamma \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3,$$

où α, β, γ sont les réels trouvés à la Question (1e).

(f) Donner la loi de la variable X_n .

(3) Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n , ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

(4) Reconnaître la loi de T_1.

(5) Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $P[T_2 = 2]$ et $P[T_2 = 3]$.

(6) (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

(b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P[T_2 = n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

(c) Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $E(T_2)$.

(7) Recopier et compléter le programme suivant permettant de représenter graphiquement la *trajectoire* de la v.a. X_n, c'est à dire de générer un vecteur ligne dont les composantes sont les simulations successives de $X_0, X_1, ..., X_n$ puis l'ensemble des points correspondants.

```
function X=chaine(n)
    X=zeros(1,n+1)
    X(1)=...........;
    for i=2:n+1
        if X(i-1)==0 then
            X(i)=.................
        else
            if ...................... then
                X(i)=..............
            else
                ......................
            end
        end
    end
endfunction

n=input('n=?')
plot2d([0:n], .........., -1)
```