Problème

Partie I

(1) $C_{n+1} - C_n$ représente la différence de capital ou bien les gains algébriques à l'issue de la $(n+1)$-ième partie

⚠ $2Y_{n+1} - 1$ est une v.a qui prend la valeur 1 avec proba p
-1 avec proba $1-p$

<u>Remarque</u> : une telle v.a s'appelle une v.a de Rademacher ; il peut être utile de savoir la former à partir d'une Bernoulli :

si on gagne la $(n+1)$-ème partie, on remporte $M_{n+1}(\omega)$
perd on remporte $-M_{n+1}(\omega)$

<u>Donc</u>, en cas de victoire

$$C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) + M_{n+1}(\omega)$$

et de défaite

$$C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) - M_{n+1}(\omega)$$

<u>Dans les deux cas</u>,

$$C_{n+1}(\omega) - C_n(\omega) = \left(2Y_{n+1}(\omega) - 1\right) M_{n+1}(\omega)$$

On a bien $\boxed{C_{n+1} - C_n = (2Y_{n+1} - 1) M_n}$

(2) On somme la relation précédente avant de prendre l'espérance

$$\sum_{k=0}^{n-1} (C_{k+1} - C_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (2X_{k+1} - 1) M_{k+1}$$

|| télescopage

$$C_n - C_0 = \sum_{k=0}^{n-1} (2X_{k+1} - 1) M_{k+1}$$

Ensuite, on prend l'espérance, qui par linéarité donne

$$E(C_n) - E(C_0) = \sum_{k=0}^{n-1} E\Big((2X_{k+1} - 1) M_{k+1} \Big)$$

Or C_0 est une v.a presque sûre (constante) donc $E(C_0) = C_0$

et X_{k+1} ind. de M_{k+1} donc,
par le lemme des coalitions $2X_{k+1} - 1$ ind. de M_{k+1}
et donc $E\big((2X_{k+1} - 1) M_{k+1} \big) = E(2X_{k+1} - 1) E(M_{k+1})$

$$= (2p - 1) E(M_{k+1})$$

On a bien

$$\boxed{E(C_n) = C_0 + (2p-1) \sum_{k=0}^{n-1} E(M_{k+1})}$$

ou, par changement d'indice,

$$E(C_n) = C_0 + (2p-1)\sum_{k=1}^{n} E(M_k)$$

(3) Par <u>hypothèse du texte</u>,

$$0 \leq M_{n+1} \leq C_n$$

ce qui donne (par positivité de l'espérance)

$$0 \leq E(M_{n+1}) \leq E(C_n)$$

La question précédente donne alors <u>immédiatement</u>,

$$\boxed{E(C_n) \leq C_0 + (2p-1)\sum_{k=0}^{n-1} E(C_k)}$$

$E(C_n)$ sera donc <u>maximale</u> lorsque $M_{k+1} = C_k$, c'est à dire lorsque l'on <u>mise tout le capital restant</u> à chaque nouveau pari.

(4) Étant clair que

$\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 1]$ est décroissante au sens de l'inclusion,

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n+1} [X_k = 1] \subset \bigcap_{k=1}^{n} [X_k = 1] \right)$$

Le théorème de la limite monotone donne

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k=1]\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=1]\right)$$

Or, les v.a (X_n) étant indépendants, on a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=1]\right) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k=1) = p^n$$

Mais $p \in]\frac{1}{2};1[$ donc $p^n \longrightarrow 0$, $n\to+\infty$

On a bien

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=1]\right) = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$\boxed{P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k=1]\right) = 0}$$

La probabilité de l'évènement contraire est donc égale à 1, à savoir

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X_k=0]\right) = 1$$

Il est quasi-certain qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ pour lequel on perd le pari ; si on mise à chaque pari le total du capital la ruine est donc quasi-certaine.

le temps d'attente avant le succès est le temps d'attente du premier pari perdu ; c'est une loi géométrique de paramètre

$$P(X_n = 0) = 1-p$$

Son espérance vaut $\frac{1}{1-p}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose $M_{n+1} = \alpha M_n$ où $\alpha \in]0,1[$ constant

(5)

- si on gagne le $(n+1)$-ème pari

$$C_{n+1}(\omega) = M_{n+1}(\omega) + C_n(\omega) = \alpha C_n(\omega) + C_n(\omega) = (1+\alpha) C_n(\omega)$$

- si on perd le $(n+1)$-ème pari

$$C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) - M_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) - \alpha C_n(\omega) = (1-\alpha) C_n(\omega)$$

Or

$$(1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} = \begin{cases} 1+\alpha & \text{si } X_{n+1} = 1 \text{ (si on gagne le pari)} \\ 1-\alpha & \text{si } X_{n+1} = 0 \text{ (si on perd)} \end{cases}$$

On a bien, dans les 2 cas,

$$\boxed{C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}} (1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n}$$

(6) $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$

S_n prend pour valeur le total des k à $X_k = 1$, c'est à dire le nombre de paris gagnés parmi les n premiers. C'est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p donc

$$S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) \text{ et } E(S_n) = np$$

(7) On procède par <u>récurrence</u>

- <u>initialisation</u> : pour $n = 1$

on a $C_1 = (1+\alpha)^{X_1}(1-\alpha)^{1-X_1} C_0$ d'après (5)

donc $C_1 = (1+\alpha)^{S_1}(1-\alpha)^{1-S_1} C_0$ car $S_1 = X_1$ et la relation est vraie pour $n = 1$.

- <u>hérédité</u> : si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} C_0$,

alors, toujours par (5), on a

$$\begin{aligned}
C_{n+1} &= (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}} C_n \\
&\overset{(HR)}{=} (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} C_0 \\
&= (1+\alpha)^{S_n + X_{n+1}}(1-\alpha)^{n+1-S_n-X_{n+1}} C_0 \\
&= (1+\alpha)^{S_{n+1}}(1-\alpha)^{n+1-S_{n+1}} C_0,
\end{aligned}$$

et la récurrence est finie.

(8) De la question (7), on déduit (car $C_0 \in \mathbb{R}_+^*$)

$$\frac{C_n}{C_0} = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}$$

donc $$E\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right) = E\left(\frac{1}{n}\ln\left((1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}\right)\right)$$

$$= E\left[\frac{1}{n}\left(S_n \ln(1+\alpha) + (n-S_n)\ln(1-\alpha)\right)\right]$$

$$\overset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{n}\ln(1+\alpha)E(S_n) + \frac{1}{n}\ln(1-\alpha)E(n-S_n)$$

$$\overset{\text{d'après (6)}}{=} \frac{\ln(1+\alpha)np}{n} + \frac{\ln(1-\alpha)(n-np)}{n}$$

Ainsi,

$$\boxed{E\left(\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right) = p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)}$$

ce qu'on voulait.

Partie III $\quad p \in]\frac{1}{2};1[$ fixé.

$$f : x \longmapsto p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x) \quad , x \in]0,1[$$

(9) Étude de f

(a) f est combinaison de fonction log

sur $x \in]0;1[$, $1-x > 0$ donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$

$$f'(x) = \frac{p}{1+x} - \frac{(1-p)}{1-x} = \frac{p - px - 1 + p - x + px}{(1-x)(1+x)} = \frac{2p-1-x}{1-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-p}{(1+x)^2} - \frac{(1-p)}{(1-x)^2} < 0$$

donc $\underline{f \text{ est concave sur }]0;1[}$

On a le tableau de variations de f

x	0		$2p-1$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖
f	0	$\nearrow$	$f(2p-1)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖

$$f(2p-1) = p\ln(2p) + (1-p)\ln(2(1-p))$$
$$= \ln(2) + p\ln(p) + (1-p)\ln(1-p) =$$

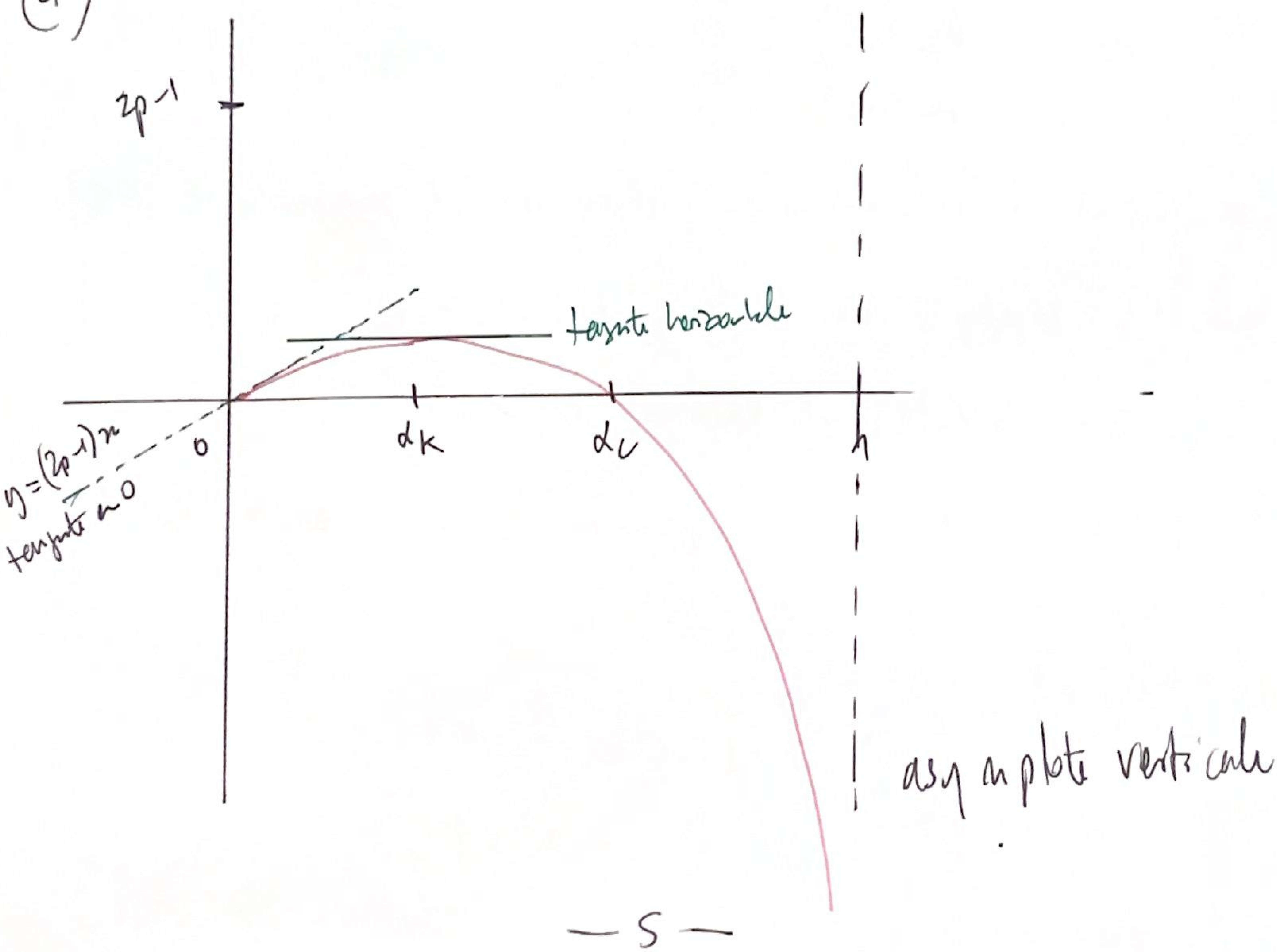
Le max de f est atteint en $\boxed{x_K = 2p-1}$

(b) Par algèbre des limites,

$\lim_{x \to 1} f(x) = -\infty$ (car $\ln(1-x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} -\infty$)

(c) f est bijective de $[\alpha_K ; 1[$ sur $]-\infty ; f(2p-1)]$
(théorème de bijection : f continue et strictement décroissante)
$f(\alpha_K) > 0$ car f strictement croissante sur $[0, \alpha_K]$ et $f(0) = 0$
Donc $0 \in]-\infty ; f(2p-1)]$ admet un unique antécédent par
f sur $]\alpha_K, 1[$, noté α_C.
Sur $[0 ; \alpha_K]$, f ne s'annule qu'en 0.

(d)



(10) pour $p = 1/2$, $\alpha_k = 0$

pour $p = 1$, $\alpha_k = 1$

si le jeu est équiprobable, on ne mise rien

si le jeu est gagné de façon certaine, on mise tout.

Situations peu intéressantes donc...

(11) $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$, $x \in]0;1[$

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 0$ par ~~algèbre des limites~~

car $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \sim \dfrac{x}{-x} = -1 \xrightarrow{x \to 0} -1$

. En posant $\varphi(x) = -1$, on prolonge donc φ par continuité en 0

. En 1, l'algèbre des limites, donne $\varphi(x) \xrightarrow[x \to 1]{} 0$

(car $\ln(1+x) \to \ln(2)$ et $\ln(1-x) \to -\infty$)

En posant $\varphi(x) = 0$, on prolonge φ par continuité en 1

$$\varphi(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}, & \text{si } x \in]0,1[\\ 0, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

continue sur $[0,1]$

(b) Sur $]0;1[$, $\ln(1-x)$ ne s'annule pas.
Par quotient de fonctions log dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, φ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\varphi'(x) = \frac{\dfrac{\ln(1-x)}{1+x} + \dfrac{\ln(1+x)}{1-x}}{(\ln(1-x))^2}$$

$$= \frac{(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}$$

$$\boxed{\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}}$$

avec $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$

(c) h dérivable sur $]0,1[$ comme combinaison de produits de fonctions usuelles dérivables.

$$h'(x) = -\ln(1-x) - \frac{1-x}{1-x} + \ln(1+x) + \frac{1+x}{1+x}$$

$$h'(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$h'(x) \geqslant 0 \iff \frac{1+x}{1-x} \geqslant 1 \iff 1+x \geqslant 1-x$$
$$\iff x \geqslant 0$$

On a les variations de h

x	0		1
$h'(x)$	‖	$+$	‖
h	0	$\nearrow$	$2\ln(2)$

En particulier, $h(x) > 0$ sur $]0,1[$

(d) On en déduit les variations de φ

x	0		1
$\varphi'(x)$	‖	$+$	‖
φ	-1	$\nearrow$	0

φ est strictement croissante sur $]0,1[$ et continue sur $[0,1]$ donc strictement croissante sur $[0,1]$.
Elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[-1,0]$ (par le théorème de bijection)

(e) On regarde le <u>taux d'accroissement</u>

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}+1}{x} = \frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$$

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)+\left(-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)}{x\left(-x+o(x)\right)}$$

$$= \frac{-x^2+o(x^2)}{-x^2+o(x^2)} = \frac{-1+o(1)}{-1+o(1)}$$

$$\xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

donc φ dérivable en 0 et $\varphi'(0)=1$.

(13) On sait que

. $\alpha_c(p) \in \,]2p-1;1[$

. $f(\alpha_c(p)) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad p\ln\left(1+\alpha_c(p)\right)+(1-p)\ln\left(1-\alpha_c(p)\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{p\ln\left(1+\alpha_c(p)\right)}{(1-p)\ln\left(1-\alpha_c(p)\right)} = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln\left(1+\alpha_c(p)\right)}{\ln\left(1-\alpha_c(p)\right)} = \frac{p-1}{p} = 1-\frac{1}{p}$$

$$\iff \varphi\left(\alpha_c(p)\right) = 1 - \frac{1}{p}$$

$$\iff \boxed{\alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$$

(b) $\lim\limits_{t \to -1} \varphi^{-1}(t) = 0$

<u>En effet</u>, des variations de φ on déduit les variations de φ^{-1}

t	-1		0
φ^{-1}	0	$\nearrow$	1

$$1 - \frac{1}{p} \xrightarrow{p \to 1/2} -1$$

Par <u>composition</u>, $\lim\limits_{p \to \frac{1}{2}} \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \lim\limits_{t \to -1} \varphi^{-1}(t) = 0$

<u>Donc</u>, α_c se prolonge par continuité en $p = 1/2$ en posant $\alpha_c\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

φ est dérivable en $0 = \varphi^{-1}(-1)$

et $\varphi'(0) = 1 \neq 0$

Donc, on sait que φ^{-1} dérivable en -1

$$\text{et} \quad (\varphi^{-1})'(-1) = \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(-1))} = \frac{1}{\varphi'(0)} = 1$$

Par composition* avec $p \longmapsto 1 - \frac{1}{p}$, on a

α_c dérivable en $1/2$

et $\boxed{\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4}$

(* dont la dérivée vaut $\frac{1}{p^2}$ donc $\frac{1}{(1/2)^2} = 4$ en $p = 1/2$)

(c) Par conséquent, la formule de Taylor-Young donne

$$\alpha_c(p) = \alpha_c\left(\frac{1}{2}\right) + \alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right)\left(p - \frac{1}{2}\right) + o\left(p - 1/2\right)$$

lorsque $p \to 1/2$

ou encore,

$$\alpha_c(p) \underset{p \to 1/2}{\sim} 4\left(p - \frac{1}{2}\right) = 2(2p-1) = 2\alpha_K,$$

ce qu'on voulait.

Partie 4 (Scilab)

(14)

```
function n=paris(p,alpha,c0,c_obj)
    C=c0
    n=1
    while c<c_obj
        X=grand(1,1,'bin',1,p)
        c= (1+alpha)^X*(1-alpha)^(1-X)*c
        n=n+1
    end
end function
```

(D'après la question (5))

(15)

```
function [K,n]=kelly(p,alpha,c0,c_obj)
    C=c0
    n=1
    K=c0
    a=2*p-1
    while c<c_obj
        X=grand(1,1,'bin',1,p)
        C=(1+alpha)^X*(1-alpha)^(1-X)*c
        K=(1+a)^X*(1-a)^(1-X)*K
        n=n+1
    end
end function
```

ce qu'on gagne avec le choix optimal de $\alpha = a = 2p-1$