Devoir surveillé n°2

Solution

Problème 1

On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}, & \text{si } x \in]0;1[\\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie A : Étude de la fonction f

(1) On doit vérifier que f est continue sur $]0;1[$ ainsi qu'au point de raccordement, ce qu'on fait donc séparément:

- Sur $]0;1[$, f est quotient de composées fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas, elle est donc continue;
- En 0, $\ln(1-x) \to 0$ et $\ln(x) \to -\infty$. Par l'algèbre des limites,
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = 0 = f(0)$$
et f est bien continue en 0.

Au final, f est bien continue sur $[0;1[$.

(2) Pour la dérivabilité de f en 0, on regarde la limite (éventuelle) de son taux d'accroissement en 0.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{\ln(1-x)}{x\ln(x)} \\ &= \frac{-x+o(x)}{x\ln(x)} = \frac{-1+o(1)}{\ln(x)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0, \qquad \text{(par algèbre des limites)} \end{aligned}$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

(3) Comme f est quotient de composées de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;1[$ (dont le dénominateur ne s'annule pas), f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur ce même intervalle. De plus, pour $x \in]0;1[$,

$$f'(x)\frac{\frac{-\ln(x)}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}}{\ln(x)^2} = \frac{-(1-x)\ln(1-x) - x\ln(x)}{x(1-x)\ln(x)^2},$$

ce qui est bien la formule attendue.

(4) (a) Si $t \in]0;1[$, alors $t > 0$ d'une part et $\ln(t) < 0$ d'autre part. Par produit, on a bien $t\ln(t) < 0$.

(b) On applique le résultat de la question précédente avec à la fois $t = x$ mais aussi $t = 1 - x$ en observant que, si $x \in]0;1[$, alors $(1-x) \in]0;1[$ également. Ainsi, on a

$$\forall x \in]0;1[, \qquad x\ln(x) < 0 \qquad \text{et} \qquad (1-x)\ln(1-x) < 0.$$

Comme, en revanche, $x(1-x)\ln(x)^2 > 0$, on peut conclure que

$$\forall x \in]0;1[, \qquad f'(x) > 0$$

et f est strictement croissante sur $]0;1[$. Étant continue en 0, elle est en fait strictement croissante sur $[0;1[$.

(5) Sans difficulté, comme $1 - x \to 0$, $x \to 1$, et que $\ln(x) \to 0^-$, l'algèbre des limites donne cette fois

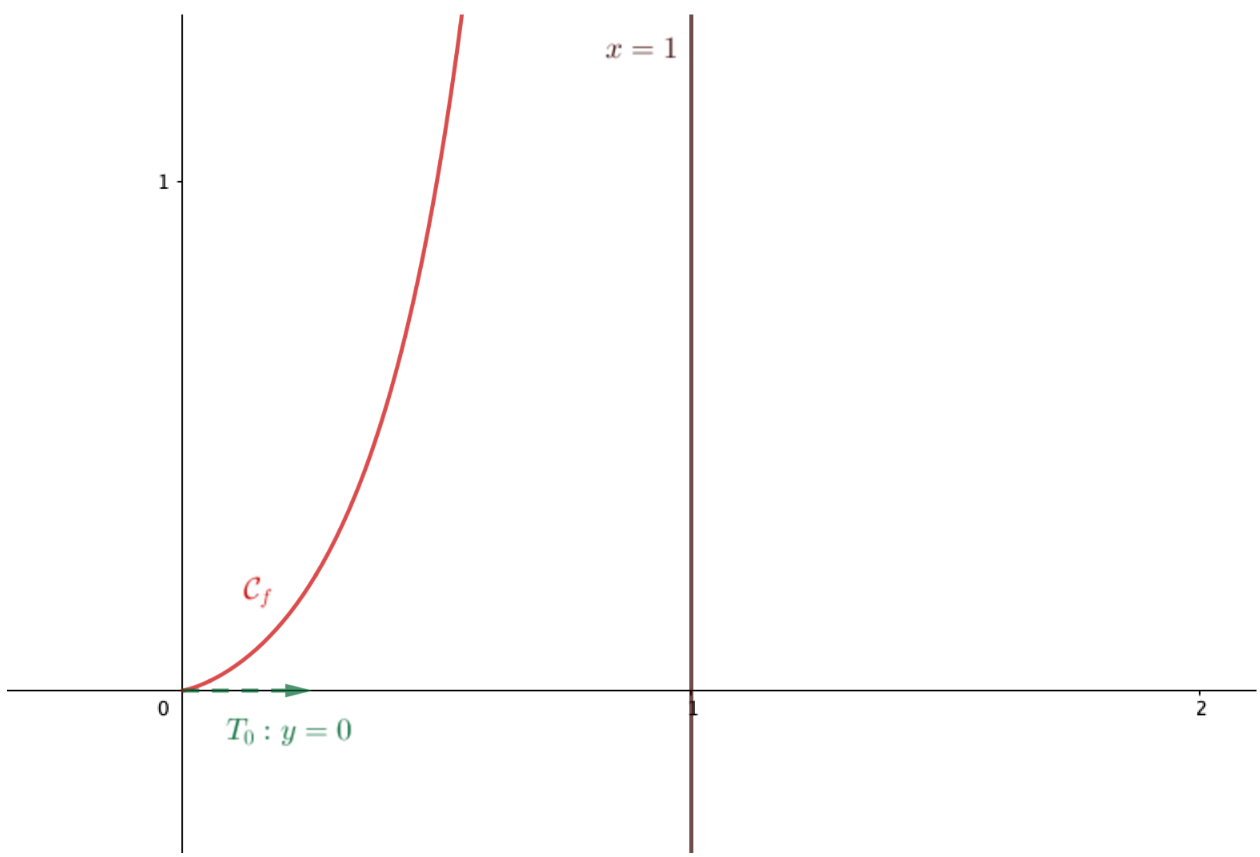
$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

ce qui se traduit graphiquement par la présence d'une asymptote verticale à la courbe représentative de f en 1.

(6) On commence par présenter le tableau de variations de f.

x	0		1
$f'(x)$	0	$+$	$\|$
f	0	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$

La tangente en 0 est horizontale (la dérivée y est nulle). On oublie pas l'asymptote verticale en 1.



Partie B : Résolution de l'équation $f(x) = x$

On introduit la fonction g définie sur $]0;1[$ par

$$g(x) = \ln(1-x) - x\ln(x).$$

(7) Même arguments que précédemment; g est la différence de la composée de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$ donc elle même de classe $\mathcal{C}^2$ sur ce même intervalle. Pour $x \in]0;1[$, on a

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{1-x} - \ln(x) - 1 \\ g''(x) &= -\frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

(8) Le signe immédiat de $g''(x)$ sur $]0;1[$ nous permet de dresser le tableau de variations de g':

x	0		β		1
$g''(x)$	$\Vert$		$-$		$\Vert$
g'	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

g' est continue est strictement décroissante sur $]0;1[$. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de $]0;1[$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent noté β sur $]0;1[$. On obtient alors le tableau de signes de $g'(x)$:

x	0		β		1
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$

(9) Le signe de $g'(x)$ donne bien sûr le sens de variations de g.

x	0		β		α		1
$g'(x)$	$\Vert$	$+$	0		$-$		$\Vert$
g	$\Vert$ 0	$\nearrow$	$g(\beta)$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

g est strictement croissante sur $]0;\beta]$. En particulier $g(\beta) > 0$ (car $g(x) \to 0^+$, $x \to 0$). De plus, g est continue et strictement décroissante sur $]\beta;1[$ et réalise donc une bijection de $]\beta;1[$ sur $]-\infty;g(\beta)[$. En particulier, comme $0 \in]-\infty;g(\beta)[$ (du fait que $g(\beta) > 0$), 0 admet un unique antécédent par g sur $]\beta,1[$, que l'on note α. On a bien $g(\alpha) = 0$ et $\beta < \alpha < 1$.

(10) Soit $x \in [0;1[$.

$$f(x) = x \Longleftrightarrow \left[x = 0 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = x \quad \text{et} \quad x \in]0;1[\right)\right]$$

Or, pour $x \in]0;1[$,

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} = x &\iff \ln(1-x) = x\ln(x) \\ &\iff \ln(1-x) - x\ln(x) = 0 \\ &\iff g(x) = 0 \\ &\iff x = \alpha \end{aligned}$$

Ainsi, $f(x) = x$ admet deux solutions, 0 et α. Par ailleurs, pour $x \in]0;1[$,

$$f(x) - x = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)} - x = \frac{\ln(1-x) - x\ln(x)}{\ln(x)} = \frac{g(x)}{\ln(x)}.$$

On connait le signe de $g(x)$. Celui de $\ln(x)$ est négatif sur $]0;1[$. On en déduit le tableau de signes suivant

x	0		α		1
$f(x)-x$	0	$-$	0	$+$	‖

☞ Un programme de dichotomie permet d'obtenir une valeur approchée de α. Pour une précision de 10^{-4}, on trouve $\alpha \simeq 0.3036296$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On introduit la suite (ω_n) définie par

$$\begin{cases} \omega_0 \in]0;1[, \\ \omega_{n+1} = f(\omega_n) \qquad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

(12) 0 et α sont les deux *points fixes* de f. Si le premier terme de la suite est égal à l'une de ces valeurs, on génère donc une suite constante.

(13) Dans cette question, on suppose que $\omega_0 \in]0,\alpha[$.

(a) C'est une récurrence trèèèèès classique (et sans difficulté).

- initialisation. Pour $n = 0$, ω_0 existe (il est donné) et est bien dans l'intervalle souhaité.

- hérédité. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on a ω_n qui existe et qui vérifie $0 < \omega_n < \alpha$. Alors, ω_n est dans l'ensemble de définition de f et $\omega_{n+1} = f(\omega_n)$ existe. De plus, par stricte croissante de f sur $[0;1[$, on a

$$0 = f(0) < f(\omega_n) = \omega_{n+1} < f(\alpha) = \alpha$$

et la récurrence est terminée.

(b) Observons que

$$\omega_{n+1} - \omega_n = f(\omega_n) - \omega_n.$$

Or, on connait le signe (négatif) de $f(x) - x$ sur $]0;\alpha[$ où se situent tous les termes de la suite, on peut donc conclure que (u_n) est décroissante.

(c) La suite (ω_n) est décroissante et minorée par 0. Par convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ qui va vérifier (par continuité de f lors du passage à la limite dans la relation de récurrence $\omega_{n+1} = f(\omega_n)$)

$$f(\ell) = \ell$$

et, du fait que $0 < \omega_n \leq \omega_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par décroissante de (ω_n)

$$\ell \in [0; \omega_0].$$

Connaissant les points fixes de f, on en déduit que la seule valeur possible pour ℓ est $\ell = 0$. Ainsi, dans ce cas, (ω_n) converge vers 0.

(14) Dans cette question, on suppose que $\omega_0 \in \,]\alpha, 1[$ et on cherche à montrer que (ω_n) **n'est pas** bien définie.

(a) D'après l'étude précédente de f, l'image de l'intervalle $]\alpha; 1[$ par f est l'intervalle $]\alpha; +\infty[$ qui n'est pas inclus dans $]\alpha; 1[$ qui n'est donc pas stable sous l'action de f. Et c'est bien le problème!

(b) On raisonne dorénavant par l'absurde et on suppose que ω_n est défini pour tout n.

(i) C'est une récurrence.

- <u>initialisation</u>. $\omega_1 - \omega_0 = f(\omega_0) - \omega_0 > 0$ car $\omega_0 \in]\alpha; 1[$ et connait le signe de $f(x) - x$ sur cet intervalle.
- <u>hérédité</u>. Si, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\omega_n \leq \omega_{n+1}$, alors, par croissance de f, on a

$$\omega_{n+1} = f(\omega_n) \leq f(\omega_{n+1}) = \omega_{n+2},$$

et la récurrence est terminée; (ω_n) bien est croissante.

(ii) Si (ω_n) convergeait, ce serait vers une limite ℓ vérifiant $f(\ell) = \ell$. Or, il n'y a que deux solutions : α ou 0. Mais, par croissante de (ω_n), on a aussi $\ell \geq \omega_0 > \alpha > 0$ et ce n'est donc pas possible. Donc ω_n diverge vers $+\infty$ (comme conséquence du théorème de convergence monotone pour une suite croissante divergente).

(iii) Comme (ω_n) diverge vers $+\infty$, il existe nécessairement un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $\omega_n \geq 1$. Mais alors $\omega_n \notin \mathcal{D}_f$ et on ne peut pas calculer ω_{n+1}, ce qui contredit la bonne définition de la suite.

(c) Il suffit de voir à partir de quand $\omega_n \geq 1$ à l'aide d'une boucle `while`.

```
w=input('w_0=?')
n=0
while w < 1
    n=n+1
    w=log(1-w)/log(w)
end
disp(n)
```

Partie D : Étude d'une suite implicite

On note, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation : $x^n + x - 1 = 0$.

(15) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction h_n est polynomiale; elle est définie, continue, dérivable (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \geq 0$,

$$h_n'(x) = nx^{n-1} + 1 \geq 1 > 0$$

donc h_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On dresse son tableau de variations:

x	0	u_n	$+\infty$
$h_n'(x)$		$+$	
h_n	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$

Par le théorème de bijection, n_n étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[-1; +\infty[$. En particulier, $0 \in [-1; +\infty[$ admet bien un unique antécédent, noté u_n, sur $\mathbb{R}_+$ par h_n ou encore u_n unique solution sur $\mathbb{R}_+$ de l'équation (E_n).

(16) Pour encadrer u_n, on "encadre les images". Plus précisément,

$$h_n(0) = -1 < h_n(u_n) = 0 < 1 = h_n(1)$$

ce qui donne, car h_n (et donc sa bijection réciproque h_n^{-1} aussi) est strictement croissante, que

$$0 < u_n < 1.$$

(17) Pour $n = 1$ et $n = 2$, on peut résoudre "à la main" les équations.

- $\underline{n = 1}$. L'équation à résoudre est alors $x^1 + x - 1 = 0 \iff 2x - 1 = 0$ ce qui donne sans la moindre difficulté
$$u_1 = \frac{1}{2}.$$
- $\underline{n = 2}$. L'équation à résoudre est alors $x^2 + x - 1 = 0$ qui admet deux solutions sur $\mathbb{R}$, à savoir $(-1 \pm \sqrt{5})/2$ mais u_2 est l'unique solution positive, donc
$$u_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

(18) (a) Dans ce programme par dichotomie, on continue la boucle tant que la largeur de l'intervalle de recherche $b - a$ est supérieur à la précision souhaitée (ici 10^{-3}).

```
function u = valeur_approchee(n)
    a = 0 //borne de gauche intervalle de recherche
    b = 1 //borne de droite intervalle de recherche
    while b-a > 10^(-3)
        c = (a + b) / 2
        if (c^n+c-1) > 0 then //si h_n(c) >0, la solution est à sa gauche
            b=c // la borne de droite devient le milieu
        else
            a=c //la borne de gauche devient le milieu
        end
        u = c
    end
endfunction
```

(b) La liste `L` contient les 50 premiers termes de la suite (u_n) qu'on représente graphiquement. On peut conjecturer que la suite (u_n) est croissante et qu'elle converge vers une limite $\ell \simeq 0.95$.

(19) Soit $x \in]0;1[$.

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) - h_n(x) &= x^{n+1} + x - 1 - x^n - x + 1 \\ &= x^{n+1} - x^n \\ &= x^n(x-1) < 0 \end{aligned}$$

car $x \in]0;1[$. En appliquant avec $x = u_n \in]0;1[$, on a

$$h_{n+1}(u_n) - h_n(u_n) < 0$$

ou encore (car $h_n(u_n) = 0$)

$$h_{n+1}(u_n) < 0 = h_{n+1}(u_{n+1}).$$

Or, h_{n+1} est strictement croissante (et sa bijection réciproque aussi) donc

$$u_n < u_{n+1}$$

et (u_n) est alors bien croissante (comme conjecturé).

(20) (a) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1. Par le théorème de convergence monotone, elle converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell \in [0;1]$ (par passage à la limite dans les inégalités).

(b) On suppose que $\ell \in [0,1[$. Si $\ell = 0$, alors $\ln(u_n) \to -\infty$ et par algèbre des limites, $n\ln(u_n) \to -\infty$. Si $\ell \in]0;1[$, $\ln(u_n) \to \ln(\ell) < 0$ et toujours par algèbre des limites, $n\ln(u_n) \to -\infty$.

Il suit que, par composition des limites,

$$u_n^n = \exp\left(n\ln(u_n)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais alors, en revenant à la définition de u_n, à savoir que c'est la solution (positive) de (E_n) et que donc

$$u_n^n + u_n - 1 = 0,$$

on a alors, en passant à la limite dans la relation ci-dessus,

$$0 + \ell - 1 = 0 \Longrightarrow \ell = 1.$$

Or on a supposé que $\ell < 1$. C'est impossible. Ainsi, nécessairement $\ell = 1$ et (u_n) converge donc vers 1.

(21) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que $u_n \in]0;1[$ et donc le calcul de $f(u_n)$ a du sens.
Comme $u_n^n + u_n - 1 = 0$, on déduit que $1 - u_n = u_n^n$ et donc

$$\begin{aligned} f(u_n) &= \frac{\ln(1-u_n)}{\ln(u_n)} = \frac{\ln(u_n^n)}{\ln(u_n)} \\ &= \frac{n\ln(u_n)}{\ln(u_n)} \\ &= n \end{aligned}$$

Mais alors, comme f est strictement croissante (et continue) sur $]0;1[$, elle réalise une bijection sur $]0+\infty[$ et la bijection réciproque f^{-1} a le même sens de variations de f et vérifie même

$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = 1.$$

Ainsi, $f(u_n) = n$ donne

$$u_n = f^{-1}(n).$$

En particulier, $n < n+1$ donne, par (stricte) croissante de f^{-1} que $u_n = f^{-1}(n) < f^{-1}(n+1) = u_{n+1}$ et on retrouve la croissance de (u_n). De plus

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} f^{-1}(n) = 1,$$

ce qu'on avait aussi trouvé précédemment.

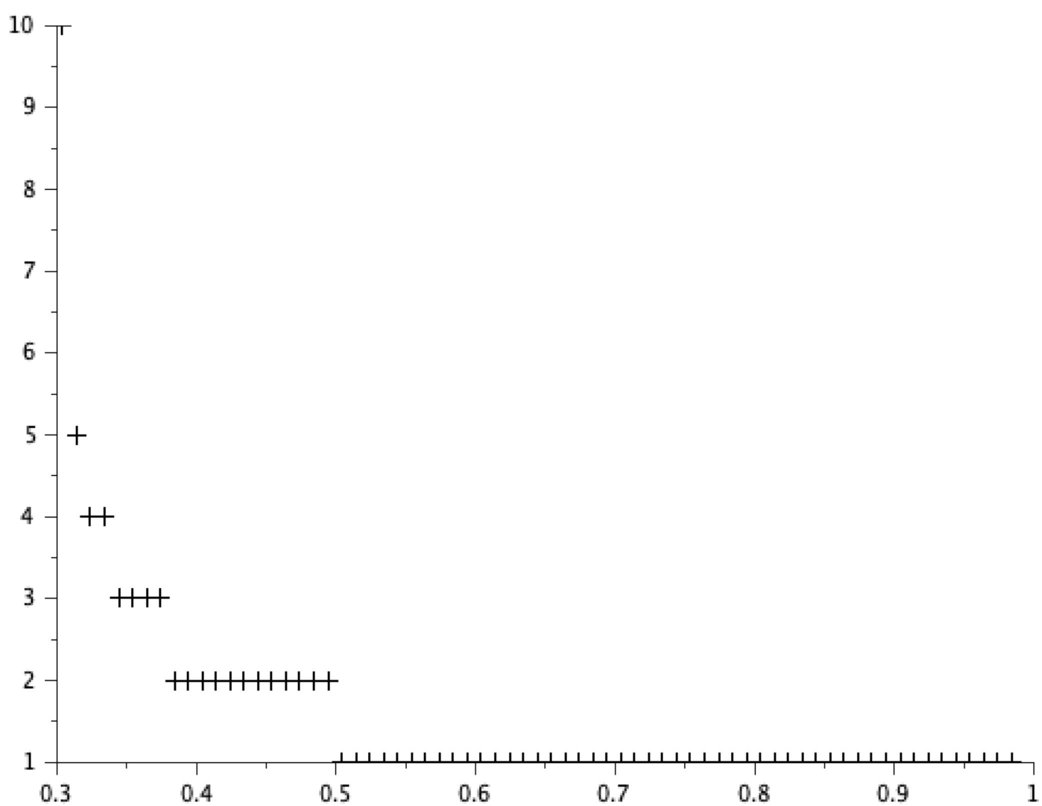
Bonus & complément

Pour les curieux et les curieuses voulant savoir à partir de quel moment la suite (ω_n) n'est plus définie, on a écrit le petit programme suivant (qui affiche la figure ci-après) qu'on laisse à méditer...

```
function y=f(x)
        y=log(1-x)/log(x)
endfunction

function n=rang(w0)
u=w0
n=0
while w<1
    n=n+1
    w=f(w)
end
endfunction

W0=0.304:.01:0.99 //on sait que alpha est autour de 0.3036...
plot2d(W0, feval(W0, rang), -1)
```



On espère qu'il n'y a plus aucun doute dans l'esprit de quiconque de l'importance de vérifier qu'une suite récurrente est **bien définie**.

Problème 2

On considère la matrice M définie par :

$$M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) La matrice M est triangulaire (supérieure) sans zéro sur la diagonale; elle est donc inversible.

(b) (*) La matrice M est triangulaire (supérieure); ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux. Ainsi, $\mathrm{Sp}(M) = \{\frac{1}{3}; \frac{1}{2}; 1\}$ et ainsi M a trois valeurs propres distinctes. Comme M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, elle est bien diagonalisable.

(c) On résout les équations correspondantes.

- Pour trouver V_1:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(M - I) &\iff (M-I)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}y &= 0 \\ -\frac{1}{2}y + \frac{2}{3}z &= 0 \\ -\frac{2}{3}z &= 0 \end{cases} \\ &\iff y = z = 0 \\ &\iff X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc, en posant $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}(M - I) = \mathrm{Vect}(V_1)$.

- Pour trouver V_2:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) &\iff \left(M - \frac{1}{2}I\right)X = 0 \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y &= 0 \\ \frac{2}{3}z &= 0 \\ -\frac{1}{6}z &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= -y \\ z &= 0 \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc, en posant $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Ker}\left(M - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{Vect}(V_2)$.

- Enfin, pour trouver V_3:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) \iff \left(M - \frac{1}{3}I\right) X = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}y & = & 0 \\ \frac{1}{6}y + \frac{2}{3}z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -\frac{3}{4}y \\ z & = & -\frac{1}{4}y \end{array} \right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}y \\ y \\ -\frac{1}{4}y \end{pmatrix} = -4y \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et on a donc, en posant $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\operatorname{Ker}\left(M - \frac{1}{3}I\right) = \operatorname{Vect}(V_3)$.

(d) La famille (V_1, V_2, V_3) est formee de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}$, qui est un espace de dimension 3. Pour qu'elle en forme une base, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha V_1 + \beta V_2 + \gamma V_3 = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha - \beta + 3\gamma & = & 0 \\ \beta - 4\gamma & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \alpha = \beta = \gamma = 0$$

La famille (V_1, V_2, V_3) est bien libre et forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}$.

(e) Observant que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = V_1 + 4V_2 + V_3,$$

on a les coordonnées $(1, 4, 1)$ dans la base (V_1, V_2, V_3) du vecteur considéré.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

- si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.
- si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1, on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{ème}$ tirage".

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{ème}$ tirage et on pose $X_0 = 2$.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

On considère les quatre matrices colonnes suivantes :

$$U_n = \begin{pmatrix} P[X_n = 0] \\ P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \end{pmatrix}, \; V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) On distingue donc, comme demandé, trois cas:

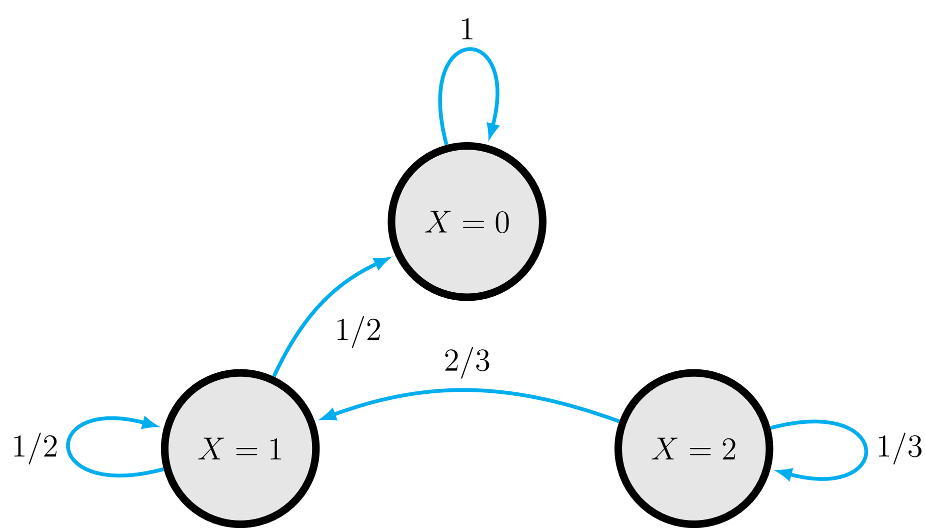
- $X_0 = 2$ donc $X_0(\Omega) = \{2\}$

- Comme on peut tirer (ou pas) une boule blanche au premier tirage, on a donc $X_1(\Omega) = \{1, 2\}$
- A partir du deuxième tirage, on aura pu tirer les deux boules blanches donc $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ pour $n \geq 2$.

(b) La probabilité 2/3 déja présente correspond à la probabilité conditionnelle $p_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)$. Sachant qu'on a 2 boules blanches dans l'urne (après n tirages), la probabilité qu'il n'y en ait plus qu'une après $n+1$ tirages et donc de piocher une boule blanche au $(n+1)$-ème tirage, ce qu'on fait avec probabilité 2/3. De la même manière

- $P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0) = 1$ car si il n'y a pas de boules blanches après le tirage n, on est certain qu'il n'y en n'aura pas après le suivant.
- $P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0) = 1/2$ car si il y a 1 boule blanche après le tirage n (donc une blanche et une rouge) il n'y en aura plus au suivant si on tire cette boule blanche (avec probabilité 1/2.
- $P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0) = 0$ car l'évènement est impossible. Si il y a deux boules dans l'urne, il en restera soit 1 soit 2 après un autre tirage donc il ne peut donc y en avoir 0.

Quand une probabilité conditionnelle vaut 0, on ne met (souvent) pas de flèche entre les états correspondants sur le diagramme de transition. Celui-ci se remplit alors comme suit:



(c) Soit $n \geq 2$. En utilisant la formule des probabilités totales avec le s.c.e $((X_n = 0); (X_n = 1); (X_n = 2);)$ (qui est bien un s.c.e pour $n \geq 2$ mais pas avan), on obtient :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 01P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)P(X_n = 2) \\ &= 0P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{2}{3}.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 0)P(X_n = 2) \\ &= 1P(X_n = 0) + \frac{1}{2}P(X_n = 1) + 0.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 2) &= P_{X_n=0}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 0) + P_{X_n=1}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 1) + P_{X_n=2}(X_{n+1} = 2)P(X_n = 2) \\ &= 0P(X_n = 0) + 0P(X_n = 1) + \frac{1}{3}.P(X_n = 2) \end{aligned}$$

Ceci se traduit matriciellement par

$$\begin{pmatrix} P\left[X_{n+1}=0\right] \\ P\left[X_{n+1}=1\right] \\ P\left[X_{n+1}=2\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P\left[X_n=0\right] \\ P\left[X_n=1\right] \\ P\left[X_n=2\right] \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad U_{n+1}=MU_n.$$

Pour vérifier que c'est vrai pour $n=0$ et $n=1$ c'est un peu fastidieux, car il faut connaitre les lois de X_1 et de X_2... On rédige ici la vérification pour $n=0$, qui revient à vérifier que $U_1=MU_0$ à partir de la loi de X_1. Il est raisonnable de penser que si c'est bien fait, la vérification pour $n=1$ peut être lacunaire.

On a $X_1(\Omega)=\{1,2\}$. Naturellement,

$$P(X_1=2)=P(R_1)=\frac{1}{3}, \quad P(X_1=1)=P(B_1)=\frac{2}{3}.$$

Comme

$$U_0=\begin{pmatrix} P(X_0=0) \\ P(X_0=1) \\ P(X_0=2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

on a bien

$$U_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = MU_0$$

et la relation est vérifiée pour $n=0$.

Concernant la loi de X_2, on a $X_2(\omega)=\{0,1,2\}$.

$$P(X_2=2)=P(R_1\cap R_2)=P(R_1)P_{R_1}(R_2)=\frac{1}{9}, \quad P(X_2=0)=P(B_1\cap B_2)=P(B_1)P_{B_1}(B_2)=\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

et

$$P(X_2=1)=1-P(X_2=0)-P(X_2=2)=\frac{5}{9}.$$

Ainsi,

$$U_2=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = MU_1,$$

et la relation est encore vérifiée pour $n=1$. Elle est donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(d) Par construction de V_1, V_2 et V_3, on a bien sûr

$$MV_1=V_1; \quad MV_2=\frac{1}{2}V_2; \quad MV_3=\frac{1}{3}V_3.$$

(e) Pour $n\in\mathbb{N}$, notons $\mathcal{P}(n)$ la formule (à vérifier):

$$U_n=V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^n V_3.$$

- initialisation. On voit que

$$U_0=\begin{pmatrix} P\left[X_0=0\right] \\ P\left[X_0=1\right] \\ P\left[X_0=2\right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$V_1+4\left(\frac{1}{2}\right)^0 V_2+\left(\frac{1}{3}\right)^0 V_3=V_1+4V_2+V_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'après la Question (1e). Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- héredité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain n. On a alors en utilisant l'HR et le résultat de la question précédente:

$$\begin{aligned}
U_{n+1} = MU_n &= M\left(V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3\right) \\
&= MV_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n MV_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n MV_3 \\
&= V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{2}V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V\frac{1}{3}V_3 \\
&= V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} V_3
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

(f) La loi de la variable X_n est contenue dans le vecteur U_n ce qui donne d'après la question précédente:

$$\begin{pmatrix} P[X_n = 0] \\ P[X_n = 1] \\ P[X_n = 2] \end{pmatrix} = U_n = V_1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n V_2 + \left(\frac{1}{3}\right)^n V_3 = \begin{pmatrix} 1 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

(3) Comme $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, on a d'après la question précédente :

$$E(X_n) = 0 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \longrightarrow 0,\ n \to +\infty.$$

(4) Tant qu'on a pas obtenu de blanche, on remet la boule tirée (rouge) dans l'urne. Ainsi, T_1 représente le temps d'attente du premier succès (obtenir la boule blanche) lors de la répétitions d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes; il s'agit donc d'une loi géométrique

$$T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right).$$

(5) Il est clair que

$$\begin{aligned}
(T_2 = 2) &= B_1 \cap B_2 \\
(T_2 = 3) &= (B_1 \cap R_2 \cap B_3) \cup (R_1 \cap B_2 \cap B_3)
\end{aligned}$$

Ainsi, par incompatibilités des alternatives et par la formules des probabilités composées

$$\begin{aligned}
P(T_2 = 2) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(T_2 = 3) &= P(B_1)P_{B_1}(R_2)P_{B_1 \cap R_2}(B_3) + P(R_1)P_{R_1}(B_2)P_{R_1 \cap B_2}(B_3) \\
&= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} \\
&= \frac{5}{18}
\end{aligned}$$

(6) (a) Dire que $[T_2 = n]$ signifie que la deuxième boule blanche arrive au $n-$ième tirage. C'est équivalent à dire que la première blanche arrive au cours des $n-1$ premiers tirages (ou encore qu'après $n-1$

tirages il y a 1 seule boule blanche dans l'urne) et qu'après le $n-$ième tirage, il n'y en a plus. Ainsi,

$$[T_2 = n] = [X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0].$$

(b) On obtient donc

$$\begin{aligned} P(T_2 = n) &= P([X_{n-1} = 1] \cap [X_n = 0]) = P(X_{n-1} = 1) P_{X_{n-1}=1}(X_n = 0) \\ &= \frac{1}{2} P(X_{n-1} = 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(4\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right], \end{aligned}$$

comme attendu.

(c) La v.a. T_2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $nP(T_2 = n)$ converge absolument. Comme ici c'est une série à terme positifs, on ne s'intéresse qu'à la convergence simple. On observe que, pour $n \geq 2$,

$$nP(T_2 = n) = 2\left[n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]$$

et on reconnait une combinaison de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (car les raisons ont des valeurs absolues strictement inférieures à 1). Ainsi cette série converge et T_2 admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(T_2) &= \sum_{n=2}^{+\infty} nP(T_2 = n) \\ &= 2\left(\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 - \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + 1\right) \\ &= 3\left(4 - \frac{9}{4}\right) \\ &= \frac{21}{4}. \end{aligned}$$

(7) C'est sans difficulté. On distingue le cas où l'urne n'a plus de boule blanche, auquel cas, le nombre de boule(s) blanche(s) reste égal à 0 à l'instant d'après.
S'il reste des boules blanches, on en enlève une si on en pioche une. La probabilité de piocher une boule blanche est égale au nombre de boules blanches au moment du tirage (valeur stockée dans `X(i-1)`) divisé par le total de boules dans l'urne à ce moment là (valeur égale à `X(i-1) + 1`). Le programme est alors le suivant:

```
function X=chaine(n)
    X=zeros(1,n+1)
    X(1)=2; //on commence avec deux boules blanches
    for i=2:n+1
        if X(i-1)==0 then //s'il n'y a déjà plus de boules blanches
            X(i)=0
        else
            if rand()<=X(i-1)/(X(i-1)+1) then //nombre de blanches sur nombre total
de boules
                X(i)=X(i-1)-1; //une blanche en moins
            else
                X(i)=X(i-1) //sinon on ne change pas
            end
        end
    end
endfunction

n=input('n=?')
plot2d([0:n], chaine(n), -1)
```