ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°3 - sujet A

Samedi 4 Décembre
Durée : 4 heures

Exercice 1

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

(1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1} + \ln(x) - \ln(x+1)$.

- (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
- (b) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}^{+*}$ et dresser son tableau de variations.
- (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = f(n)$.
- (d) En déduire la monotonie de la suite (u_n).
- (e) Écrire une fonction `SciLab` d'en-tête `function y=u(n)` qui prend en argument un entier naturel n non nul et qui renvoie la valeur de u_n.

(2) (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- (b) Montrer que pour tout réel x positif, $\ln(1+x) \leq x$.
  En déduire que la suite (v_n) est croissante.
- (c) Donner le développement limité d'ordre 2 de $\ln(1+x)$ en 0. En déduire que

$$v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

- (d) Déterminer la nature de la série de terme général $v_{n+1} - v_n$. On note $\gamma = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n)$.
- (e) Pour $n \geq 2$, simplifier la somme partielle : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(v_{k+1} - v_k)$.
  En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ converge vers γ.

(3) (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

(b) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$$
puis que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) On rappelle que l'instruction `floor(x)` renvoie la partie entière d'un réel x et on suppose que la fonction `u` de la Question (1e) a été correctement programmée. Expliquer l'intérêt et le fonctionnement du script ci-dessous :

```
eps=input('epsilon=?'}
n=floor(1/eps)+1
disp(u(n))
```

Partie II: Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

(4) Démontrer que la série de terme général a_n converge.

(5) (a) Justifier que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}.$$

(b) Déterminer deux réels α et β tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1}.$$

(c) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k = 2 \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

(6) (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = u_{2n} - u_n + \ln(2).$$
où (u_n) est la suite définie dans la Partie I.

(b) Calculer alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

(7) (a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.$$

(b) Retrouver alors le résultat de la Question (6b)

Exercice 2

Une urne contient des boules, indiscernables au toucher, de deux couleurs. Des boules rouges en proportion p (avec $0 < p < 1$) et des boules blanches (en proportion $q = 1 - p$). On effectue des tirages successifs, avec remise, dans cette urne.
On dit que la *première série* est de longueur k si les k premiers tirages ont été d'une même couleur de boule et le $(k+1)-$ème de l'autre couleur. De même la deuxième série commence au tirage suivant la fin de la première série et se termine à un nouveau changement de couleur et ainsi de suite.
Pour $j \in \mathbb{N}^*$, on note R_j l'évènement "la boule obtenue au $j-$ième tirage est rouge".

Partie I : Étude des longueurs des deux premières séries

On note L_1 et L_2 les variables aléatoires correspondant aux longueurs des deux premières séries.

(1) (`SciLab`)

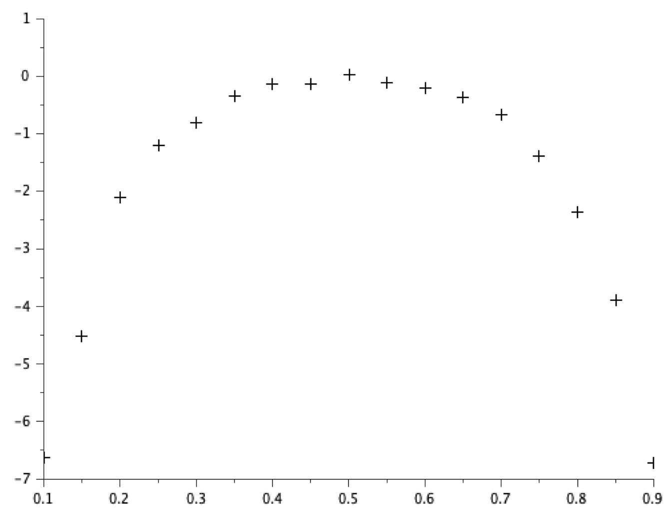
(a) Écrire une fonction `y=tirage(p)` qui simule le tirage d'une boule en renvoyant 1 si on obtient une boule rouge et 0 si on obtient une boule blanche.

(b) Recopier et compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une simulation du couple (L_1, L_2).

```
function [L1, L2]=couple(p)
    L1=.......
    init=tirage(p)
    while .........
        .....
    end
    init=1-init
    ........
    while ............
    ....
    end
endfunction
```

(c) On exécute les instructions suivantes dont les affichages sont reproduits ci-contre. Que peut-on conjecturer?

```
 function M=sample_couple(N,p)
   M=zeros(2,  N)
   for k=1:N
       [M(1,k), M(2,k)]=couple(p)
   end
endfunction
N=1000; P=0.1:0.05:0.9
C=zeros(1, length(P))
for i=1:length(P)
    ech=sample_couple(N, P(i))
    C(i)=corr(ech(1, :), ech(2,:), 1)
end
plot2d(P, C, style=-1)
```



(2) Expliciter $L_1(\Omega)$ et $L_2(\Omega)$ en justifiant la réponse.

(3) Montrer rigoureusement que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(L_1 = k) = p^k q + q^k p.$$

(4) Montrer que L_1 admet une espérance et préciser celle-ci.

(5) Déterminer la loi conjointe du couple (L_1, L_2).

(6) En déduire la loi marginale de L_2. Vérifier que L_2 a une espérance et la calculer.

(7) Montrer que $L_1 L_2$ admet une espérance et que

$$E(L_1 L_2) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$

(8) Obtenir que

$$\operatorname{cov}(L_1, L_2) = 4 - \frac{1}{pq}.$$

(9) Que peut-on en déduire pour $p \neq q$? Commenter.

(10) Montrer que, pour $p = q = 1/2$, les variables aléatoires L_1 et L_2 sont indépendantes.

Partie II : Étude du nombre de séries lors de n lancers

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on étudie le cas où $p = q = 1/2$.

Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on note N_n la variable aléatoire égale au nombre de séries obtenues lors des n premiers lancers.

(11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 (a) Justifier que $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
 (b) Calculer les probabilités $P(N_n = 1)$ et $P(N_n = n)$.

(12) (a) Déterminer les lois des variables aléatoires N_1 et N_2 et calculer leurs espérances.
 (b) Déterminer la loi de N_3 puis vérifier que $E(N_3) = 2$.

(13) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k)s^k.$$

La fonction G_n s'appelle fonction génératrice de la variable N_n.
 (a) Calculer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $G_n(0)$ et $G_n(1)$.
 (b) Montrer que $G_n'(1) = E(N_n)$.
 (c) Soit $j \in N_n(\Omega)$. Déterminer la loi conditionnelle de N_{n+1} sachant $[N_n = j]$. (*On distinguera trois cas.*)
 (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la question précédente, montrer que

$$\forall k \in [\![1; n+1]\!], \quad P(N_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(N_n = k) + \frac{1}{2}P(N_n = k-1).$$

 (e) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall s \in [0; 1]$,

$$G_{n+1}(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right) G_n(s).$$

 (f) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$,

$$G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

 (g) En déduire, à l'aide de la Question (13b), que

$$E(N_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Exercice 3

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

(1) Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que

- les coefficients de la deuxième ligne de u, v et w soient respectivement -1, 1 et 1.
- u forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$;
- $Av = -v$;
- $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(w)$

(2) Vérifier que (u, v, w) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Former la matrice P de passage de la base canonique vers cette nouvelle base.

(3) Déterminer P^{-1}.

(4) Vérifier que $P^{-1}AP = D$. Est-ce surprenant? Expliquer.

(5) On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ représenté dans la base canonique par la matrice B. Montrer que la matrice de φ dans la base (u, v, w) est encore une matrice diagonale, que l'on notera C. Expliciter un lien ente C et B.

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère l'application

$$f : \ M \in E \longmapsto AM - MB.$$

(6) Rappeler la dimension de E.

(7) Vérifier que f est un endomorphisme de E.

(8) Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est P est la matrice définie dans la partie précédente.

- (a) Montrer : $M \in \mathrm{Ker}\,(f) \Longleftrightarrow DN = NC$.
- (b) Déterminer les matrices $N \in E$ telles que $DN = NC$.
- (c) Montrer que l'ensemble
$$\mathcal{F} = \{N \in E : \ DN = NC\}$$
est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.

(9)
- (a) Déduire de la question précédente la dimension de $\mathrm{Ker}\,(f)$, puis $\mathrm{rg}(f)$.
- (b) Donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Ker}\,(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\mathrm{Im}(f)$.