Devoir surveillé n°3 - sujet A

Samedi 4 Décembre
Solution

Exercice 1

Cet exercice est extrait du sujet **ECRICOME 2018**.

Partie I : Étude de deux suites

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n), \quad \text{et} \quad v_n = u_n - \frac{1}{n}.$$

(1) (a) La limite en 0 ne pose aucun problème, c'est celle du log, on a donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$

En $+\infty$, on a une forme indéterminée; mais on met tout sous un même logarithme et on sait que $x/(x+1)$ tend vers 1 donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

(b) Sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable comme combinaison de fonctions usuelles dérivables. On a d'ailleurs

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{-x+(x+1)^2 - x(x+1)}{x(x+1)^2} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0.$$

On en déduit le tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
f	|| $-\infty$	$\nearrow$ 0

(c) Par définition de la suite (u_n)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ &= f(n). \end{aligned}$$

(d) D'après le tableau de variations de f, on voit que $f(x) < 0$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(n) < 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ et la suite (u_n) est (strictement) décroissante.

(e) C'est un petit programme sans réelle difficulté que l'on peut faire avec une boucle `for` ou avec une opération pointée. On propose les deux versions.

```
function y=u(n)
    y=0;
    for k=1:n
        y=y+1/k;
    end
    y=y-log(n)
endfunction
```

ou bien

```
function y=u(n)
    y=sum([1:n].^(-1))-log(n)
endfunction
```

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \frac{1}{n+1} - u_n + \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) \\ &= \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

et c'est ce qu'on voulait.

(b) On peut étudier la fonction différence ou utiliser un argument de convexité. En effet, la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est concave sur $]-1; +\infty[$ (elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et sa dérivée seconde est strictement négative). Sa courbe représentative se trouve donc au dessous de toutes ses tangentes, y compris celle en $x = 0$ qui a pour équation $y = x$, et qui donne bien l'inégalité attendue.

En appliquant cette inégalité à $x = 1/n$, on voit que $v_{n+1} - v_n \geq 0$ ou encore que (v_n) est croissante.

(c) La formule de Taylor-Young, ou une connaissance du cours permet d'écrire de développement limité à l'ordre 2 en 0 de cette fonction usuelle

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Comme $1/n \to 0$, si $n \to +\infty$, on peut utiliser ce DL dans l'expression de $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ou encore

$$v_{n+1} - v_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}.$$

(d) La série de terme général $1/2n^2$ est convergente comme multiple d'une série de Riemann convergente. Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série de terme générale $v_{n+1} - v_n$ est donc de même nature c'est à dire convergente. On note alors γ la valeur de sa somme

$$\gamma = \sum_{n=1}^{+\infty} (v_{n+1} - v_n).$$

(e) Le calcul de la somme partielle de la série susnommée fait apparaitre une somme télescopique;

$$\sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = v_n - v_1 = v_n - v_n - u_1 + 1 = v_n$$

Ainsi, (v_n) est convergente et

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) = \sum_{k=1}^{n+\infty} (v_{k+1} - v_k) = \gamma.$$

(3) (a) Cette question n'étant pas vraiment formulée; on interprète l'énoncé comme une demande de justification de la convergence de (u_n) et le calcul de sa limite. On voit que

$$v_n = u_n - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow u_n = v_n + \frac{1}{n}.$$

Comme (v_n) converge et que $1/n \to 0$, on en déduit que (u_n) converge et a la même limite que (v_n), c'est à dire γ.

(b) (v_n) étant croissante et convergente vers γ, (u_n) étant décroissante et convergente vers γ, on a bien l'encadrement demandé

$$v_n \leq \gamma \leq u_n.$$

Ceci permet de voir que

$$0 \leq u_n - \gamma = v_n - \gamma + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n},$$

ce qui donne bien

$$|u_n - \gamma| \leq \frac{1}{n}.$$

(c) Le programme proposé permet de calculer une approximation de γ à la précision `eps` près (rentrée par l'utilisateur). En effet, une telle approximation sera réalisée par un terme u_n tel que $|u_n - \gamma| <$ `eps`, ce qui, d'après la question précédente a lieu dès que $1/n <$ `eps`. Il suffit de prendre le premier entier n tel que $n > 1/$`eps`, donné par $\lfloor \texttt{1/eps} \rfloor + 1$.

Partie II: Étude d'une série

Pour tout entier naturel n, on pose $a_n = \dfrac{1}{n(2n-1)}$.

(4) Le terme général de la série est équivalent à celui d'une série convergente. En effet,

$$a_n = \frac{1}{n(2n-1)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2},$$

et la convergence de ce terme a été justifiée ci-avant.

(5) (a) Observons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \Longleftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

et on reconnait une décomposition des indices de sommation selon leur parité. Plus précisément,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k}$$

Or,

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ pair} \end{cases} \iff \begin{cases} k = 2j \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} 1 \leq k \leq 2n \\ k \text{ impair} \end{cases} \iff \begin{cases} k = 2j-1 \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j-1}$$

(b) Il suffit de mettre au même dénominateur et de procéder par identification

$$\begin{aligned} \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{2n-1} &\iff \frac{1}{n(2n-1)} = \frac{\alpha(2n-1)+\beta n}{n(2n-1)} \\ &\iff \begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\alpha = 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(c) On utilise les résultats des deux dernières questions

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} && \text{(d'après 5b.)} \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2\left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) && \text{(d'après 5a.)} \\ &= 2\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

(6) (a) On revient à la définition de u_n

$$\begin{aligned} u_{2n} - u_n + \ln(2) &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} - \ln(2) - \ln(n) + \ln(n) + \ln(2) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}, \end{aligned}$$

ce qu'on attendait.

(b) D'après 5c. et 6a., on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{+\infty} a_k &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k\\ &= \lim_{n\to+\infty} 2\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}\\ &= 2\times \lim_{n\to+\infty} (u_{2n}-u_n+\ln(2))\\ &= 2\ln(2),\end{aligned}$$

car, comme (u_n) converge, u_{2n} et u_n ont même limite et leur différence tend vers 0.

(7) (a) On voit que

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}\\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}\\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}.\end{aligned}$$

(b) On sait plus ou moins[1] que, si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

En prenant $g(x)=\ln(x+1)$, on voit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \ln(2),$$

et on retrouve bien la valeur précédente

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = 2\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = 2\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = 2\ln(2).$$

Remarque importante: Sommes de Riemann

Dans cet exercice, on a entre autres utilisé le résultat suivant:

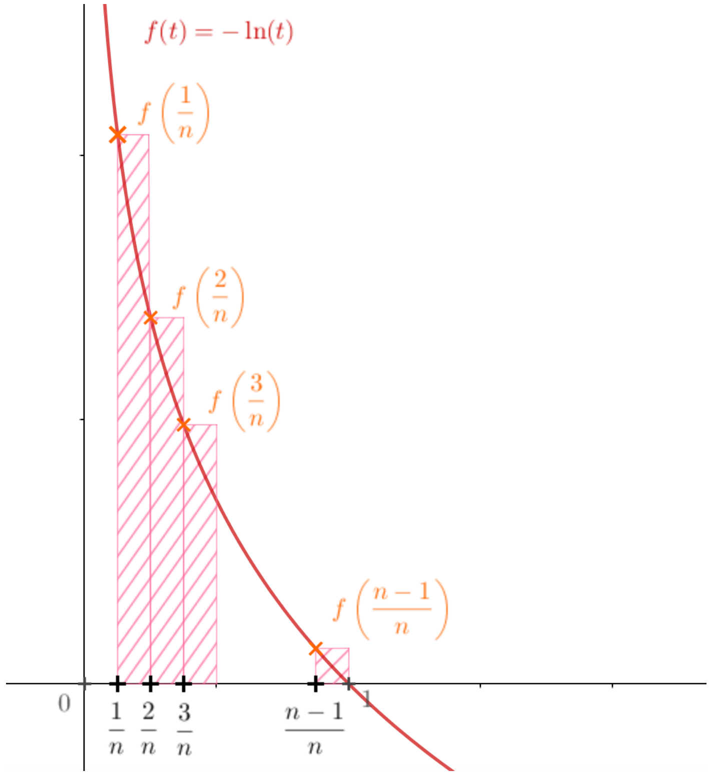
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t.$$

Ce résultat apparait parfois sous le nom de *sommes de Riemann*[2] et fait partie du cours de première année. La preuve est **admise**, mais certains sujets peuvent avoir pour but de la démontrer ou d'en démontrer une variante (**EDHEC 2008**, ou le très chouette Exercice 2 de ce DM). Lorsque le pas de $1/n$ tend vers 0, la somme des aires des rectangles tend vers l'intégrale.

[1] C'est par exemple démontré dans le sujet **EDHEC 2008**

[2] À ne pas confondre avec les séries de Riemann ni même avec les intégrales de Riemann....



Exercice 2

Partie I : Étude des longueurs des deux premières séries

On note L_1 et L_2 les variables aléatoires correspondant aux longueurs des deux premières séries.

(1) (`SciLab`)

(a) On doit simuler une Bernoulli et on a le choix des armes. C'est cadeau. Noël approche, ça se sent.

```
function y=tirage(p)
    y=grand(1,1,'bin', 1, p)
endfunction
```

(b) Tant que le tirage qui suit renvoie la même valeur que le tirage précédent, et que le premier tirage aussi appelé tirage *init*ial, la série augmente de 1.

```
function [L1, L2]=couple(p)
     L1=1
     init=tirage(p)
     while tirage(p) = = init
         L1=L1+1
     end
     init=1-init //la valeur du premier tirage de la nouvelle série est le "
contraire" de la première
     L2=1
     while tirage(p) = = init
     L2=L2+1
     end
endfunction
```

(c) On a simulé 1000 fois le couple (L_1, L_2) avec différentes valeurs de p (qui varie avec un pas de 0.05 entre 0.1 et 0.9) et on calcule, dans chaque cas, la covariance (empirique) - avec la commande `corr` - de chaque échantillon du couple. On affiche l'évolution de celle-ci en fonction de p. Lorsque cette covariance est clairement non nulle (ce qui semble être le cas pour toutes les valeurs de p sauf $p = 1/2$), on peut conjecturer que les variables L_1 et L_2 ne sont pas indépendantes.

☞ La suite est ultra classique, on l'a même déjà traitée en TD. Décidément, c'est l'avalanche de cadeaux.

(2) Chacune des deux séries est de longueur au moins 1 et peut être arbitraiement longue. On a donc

$$L_1(\Omega) = L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*.$$

(3) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
P(L_1 = k) &= P\left(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cup B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k \cap R_{k+1}\right) \\
&= P\left(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1}\right) + P\left(B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k \cap R_{k+1}\right) \qquad \text{(par incompatibilité)} \\
&= \prod_{j=1}^{k} P(R_j) \cdot P(B_{k+1}) + \prod_{j=1}^{k} P(B_j) \cdot P(R_{k+1}) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\
&= p^k q + q^k p
\end{aligned}$$

(4) On sait que L_1 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(L_1 = k)$ converge (absolument). Ici tout est positif, on s'intéresse donc à la convergence sans valeur absolue. Or

$$kP(L_1 = k) = k\left(q \cdot p^k + p \cdot q^k\right) = qp\left(kp^{k-1} + kq^{k-1}\right)$$

et on reconnait une combinaison de termes généraux de séries géométriques dérivées de raisons respectives p et q toutes deux convergentes (car $0 < p, q < 1$). Ainsi, L_1 admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(L_1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} qp\left(kp^{k-1} + kq^{k-1}\right) \\
&= qp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1}\right) \\
&= qp\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = qp\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2}\right) \\
&= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}.
\end{aligned}$$

(5) Soit donc $(k, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned}
P(L_1 = k \cap L_2 = j) &= P\left(R_1 \cap R_2 \cap ... \cap R_k \cap B_{k+1} \cap ... \cap B_{k+j} \cap R_{k+j+1}\right. \\
&\qquad \left.\cup B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_k \cap R_{k+1} \cap ... \cap R_{k+j} \cap B_{k+j+1}\right)
\end{aligned}$$

Comme précédemment, les deux alternatives sont incompatibles (l'union est disjointe), les lancers sont indépendants et on obtient

$$P(L_1 = k \cap L_2 = j) = p^k q^j p + q^k p^j q = q^j p^{k+1} + p^j q^{k+1}.$$

(6) On applique la formule des probabilités totales, au s.c.e $\{(L_1 = k) : \ k \in \mathbb{N}^*\}$ pour obtenir la loi (marginale) de L_2. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(L_2 = j \cap L_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(q^j p^{k+1} + p^j q^{k+1}\right) \\ &= q^j p^2 \sum_{k=1}^{+\infty} p^{k-1} + p^j q^2 \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \\ &= q^j p^2 \times \frac{1}{1-p} + p^j q^2 \times \frac{1}{1-q} \\ &= p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}. \end{aligned}$$

Et comme précédemment, L_2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $jP(L_2 = j)$ converge (encore une fois, tout est positif et nul besoin de convergence absolue ici). Or,

$$jP(L_2 = j) = j\left(p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}\right) = p^2 j q^{j-1} + q^2 j p^{j-1},$$

et on reconnait une combinaison de séries géométriques dérivées de raisons respectives q et p donc convergentes. Ainsi, L_2 admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(L_2) &= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} + q^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j p^{j-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

(7) On **admet** $E(L_1 L_2)$ existe. *Si on veut le montrer, il s'agit de justifier de la convergence d'une somme double infinie. Plus précisément, il faut donc justifier de la convergence (absolue) de la "série"*

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} kjP(L_1 = k \cap L_2 = j) = \sum_{k\geq 1}\sum_{j\geq 1} kj\left(q^j p^{k+1} + p^j q^{k+1}\right)$$

Si on voulait le faire, les détails sont - sans être difficile ici - un peu techniques pour le programme en ECE. En revanche, on sait calcule cette somme double si on admet qu'elle converge.

$$\begin{aligned} E(L_1 L_2) &= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} kj\left(q^j p^{k+1} + p^j q^{k+1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(p^{k+1}\sum_{j=1}^{+\infty} jq^j + q^{k+1}\sum_{j=1}^{+\infty} jp^j\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(p^{k+1} q \sum_{j=1}^{+\infty} jq^{j-1} + q^{k+1} p \sum_{j=1}^{+\infty} jp^{j-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{kp^{k+1}q}{(1-q)^2} + \frac{kq^{k+1}p}{(1-p)^2}\right) = q\sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} + p\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\ &= q \times \frac{1}{(1-p)^2} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

(8) Par la formule de König-Huyguens,

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(L_1, L_2) &= E(L_1L_2) - E(L_1)E(L_2) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \\
&= \frac{q+p-2p^2-2q^2}{pq} = \frac{1-2p^2-2+4p-2p^2}{pq} \\
&= \frac{-1+4p-4p^2}{pq} = \frac{-1+4p(1-p)}{pq} \\
&= 4 - \frac{1}{pq}.
\end{aligned}$$

car

$$p+q=1 \Longrightarrow 1 = 1^2 = (p+q)^2 = p^2+2pq+q^2.$$

(9) Le résultat précédent donne, en particulier, si $p \neq q$, $\operatorname{cov}(L_1, L_2) \neq 0$. En effet, comme $q = 1-p$

$$\frac{1}{pq} = 4 \Longleftrightarrow 4p(1-p) = 1 \Longleftrightarrow 1-4p+4p^2 = 0 \Longleftrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

La covariance non nulle traduit la non indépendance de L_1 et L_2.

(10) Pour $p = q = 1/2$, on a, d'une part

$$\begin{aligned}
P(L_1 = k \cap L_2 = j) &= q^j p^{k+1} + p^j q^{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j}
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$P(L_1 = k)P(L_2 = j) = \left(p^kq + q^kp\right)\left(p^2q^{j-1} + q^2p^{j-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{1}{2}\right)^{k+j}$$

On a donc bien

$$P(L_1 = k)P(L_2 = j) = P(L_1 = k \cap L_2 = j)$$

pour tout couple $(k, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, et les variables aléatoires L_1 et L_2 sont bien indépendantes.

Partie II : Étude du nombre de séries lors de n lancers

Dans cette partie et dans cette partie uniquement, on étudie le cas où $p = q = 1/2$.

(11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En obtenant toujours la même couleur lors des n tirages, on n'aura qu'une seule série donc $N_n = 1$. Inversement, si chaque lancer donne la couleur opposée au tirage précédent, on aura $N_n = n$. Toutes les situations intermédiaires étant possibles, on a : $N_n(\Omega) = [\![1; n]\!]$.
Remarque : ce raisonnement n'est pas très rigoureux. Il faudrait faire une récurrence pour montrer ce résultat proprement.

(b) L'évènement $(N_n = 1)$ signifie qu'on a qu'une seule série lors des n premiers tirages donc

$$(N_n = 1) = (R_1 \cap \cdots \cap R_n) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_n),$$

ce qui donne par incompatibilité puis par indépendance

$$\begin{aligned}
P(N_n = 1) &= P(R_1 \cap \cdots \cap R_n) + P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) \\
&= P(R_1)\ldots P(R_n) + P(B_1)\ldots P(B_n) \\
&= \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

De même, $(N_n = n)$ signifie qu'on alterne la couleur à chaque tirage donc :

$$(N_n = n) = (R_1 \cap B_2 \cap R_3 \dots) \cup (B_1 \cap R_2 \cap B_3 \dots),$$

ce qui donne par incompatibilité puis par indépendance :

$$P(N_n = n) = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

(12) (a)
- $N_1(\Omega) = \{1\}$ donc $P(N_1 = 1) = 1$ et $E(N_1) = 1$ (c'est une *loi certaine* ou constante).
- $N_2(\Omega) = \{1, 2\}$.
  On a d'après la question précédente

$$P(N_2 = 1) = P(N_2 = 2) = \frac{1}{2}$$

  et il suit

$$E(N_2) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(b) Commençons par voir que $N_3(\Omega) = \{1, 2, 3\}$.
On a, d'après la première question de cette partie,

$$P(N_3 = 1) = P(N_2 = 3) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

On en déduit que

$$P(N_3 = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

puis que

$$E(N_3) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 2.$$

(13) On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout s de $[0; 1]$

$$G_n(s) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k.$$

La fonction G_n s'appelle fonction génératrice de la variable N_n.

(a) On a :

- $G_n(0) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) 0^k = 0$;
- $G_n(1) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) 1^k = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) = 1$ car $\{(N_n = k) : k \in [\![1; n]\!]\}$ forme un s.c.e.

(b) La fonction G_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout s de $[0; 1]$ (par linéarité de l'opération de dérivation)

$$G_n'(s) = \left(\sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) s^k \right)' = \sum_{k=1}^{n} P(N_n = k) k s^{k-1}$$

On a donc en évaluant en $s = 1$,

$$G_n'(1) = \sum_{k=1}^{n} k P(N_n = k) = E(N_n).$$

(c) Soit $j \in N_n(\Omega)$. En procédant à un tirage de plus, le nombre de séries peut rester le même (la série en cours continue) ou augmenter de 1 (une nouvelle couleur vient interrompre la série précédente et en commencer une nouvelle). Il suit qu'on peut déjà écrire

$$P_{[N_n=j]}(N_{n+1}=k)=0, \qquad \text{si } k \notin \{j, j+1\}.$$

Pour que la nombre de séries reste le même, il faut piocher la couleur connue de la série précédente, ce qu'on fait avec probabilité 1/2 donc

$$P_{[N_n=j]}(N_{n+1}=j)=\frac{1}{2}.$$

Enfin, pour commencer une nouvelle série et augmenter le nombre de séries de 1, il faut piocher l'autre couleur que celle (connue) de la série en cours, ce qu'on fait avec probabilité 1/2, donc

$$P_{[N_n=j]}(N_{n+1}=j+1)=\frac{1}{2}.$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{[N_n = j] : \ j \in [\![1;n]\!]\}$

$$\begin{aligned} P(N_{n+1}=k) &= \sum_{j=1}^{n} P_{[N_n=j]}(N_{n+1}=k)P(N_n=j) \\ &= P_{[N_n=k-1]}(N_{n+1}=k)P(N_n=k-1)+P_{[N_n=k]}(N_{n+1}=k)P(N_n=k) \\ &= \frac{1}{2}P(N_n=k)+\frac{1}{2}P(N_n=k-1), \end{aligned}$$

où on a bien utilisé la question précédente pour d'abord supprimer les probabilités conditionnelles nulles et ensuite remplacer les deux qui restaient par 1/2. C'est bien la formule attendue.

(e) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall s \in [0;1]$

$$\begin{aligned} G_{n+1}(s) &= \sum_{k=1}^{n+1} P(N_{n+1}=k)s^k \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{1}{2}P(N_n=k)+\frac{1}{2}P(N_n=k-1)\right)s^k \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}P(N_n=k)s^k+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1}P(N_n=k-1)s^k \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)s^k+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}P(N_n=i)s^{i+1} \quad \text{car } P(N_n=n+1)=0 \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}P(N_n=k)s^k+\frac{s}{2}\sum_{i=1}^{n}P(N_n=i)s^{i} \quad \text{car } P(N_n=0)=0 \\ &= \frac{1}{2}G_n(s)+\frac{s}{2}G_n(s) \end{aligned}$$

Au final, on a

$$G_{n+1}(s)=\frac{1+s}{2}G_n(s).$$

(f) Montrons ce résultat par récurrence.

- <u>initialisation</u>. Pour $n=1$.
  $G_1(s) = \sum_{k=1}^{1} P(N_1=k)s^k = P(N_1=1)s = s$ et $s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{1-1} = s$ donc la propriété

est vraie au rang 1.

- <u>hérédité</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$G_n(s) = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}.$$

Alors, d'après la question précédente :

$$G_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} G_n(s) = \frac{1+s}{2} s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} = s \cdot \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n},$$

ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

Le résultat est démontré.

(g) D'après la question 13b, on a $E(N_n) = G_n'(1)$.
Calculons $Gn'(x)$. On a d'après la formule de la question précédente :

$$G_n'(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1} + s \cdot (n-1)\frac{1}{2}\left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-2}.$$

Donc

$$G_n'(1) = \left(\frac{2}{2}\right)^{n-1} + \frac{n-1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^{n-2} = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$$

Ainsi,

$$E(N_n) = \frac{n+1}{2}.$$

Exercice 3

Cet exercice reprend les grandes lignes d'un exercice du sujet **EML 2008**.

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie I : Réduction simultanée de A et B

(1) Il faut résoudre. C'est parti.

- On détermine u.

$$\begin{aligned} X \in \mathrm{Ker}(A) &\iff AX = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} X = 0 \iff \begin{cases} x+y+z = 0 \\ -z = 0 \\ -2x-2y-z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -x \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. On veut u avec un -1 en deuxième composante, il suffit de prendre

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- On détermine v. On remarque que $Av = -v \Longleftrightarrow Av + v = 0 \Longleftrightarrow (A+I)v = 0 \Longleftrightarrow v \in \operatorname{Ker}(A+I)$.

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(A+I) &\Longleftrightarrow (A+I)X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y+z &=& 0 \\ y-z &=& 0 \\ -2x-2y &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -z \\ \\ y &=& z \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(A+I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. On veut v avec un 1 en deuxième composante, il suffit de prendre

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- On détermine w.

$$\begin{aligned} X \in \operatorname{Ker}(A-I) &\Longleftrightarrow (A-I)X = 0 \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y+z &=& 0 \\ -y-z &=& 0 \\ -2x-2y-2z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& 0 \\ \\ y &=& -z \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker}(A-I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. On veut w avec un 1 en deuxième composante, il suffit de prendre

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) La famille (u, v, w) est constituée de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}$ qui est un espace vectoriel de dimension 3. Pour qu'elle en forme une base, il suffit donc de vérifier qu'il s'agit d'une famille libre.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} au + bv + cw = 0 &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a-b &=& 0 \\ -a+b+c &=& 0 \\ b-c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a-b &=& 0 \\ c &=& 0 \\ b-c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Il suit que la famille (u, v, w) est libre et forme bien une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
La matrice de passage de la base canonique vers cette nouvelle base est alors donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(3) On détermine P^{-1} à l'aide d'un pivot de Gauss simultané. (On remarque qu'on sait déjà que P est inversible en tant que matrice de passage: ses colonnes forment une base de l'espace...) On omet le détail, mais on trouve

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Le calcul (que l'on omet aussi dans cette solution mais dont on attend une étape intermédiaire sur la copie) donne bien $P^{-1}AP = D$. Ce n'est pas surprenant, c'est la formule de changement de base. En effet,D est la matrice, dans la base (u, v, w) de l'endomorphisme qui était représenté par A dans la base canonique. Notons cet endomorphisme ψ. Comme $Au = 0$, on a $\psi(u) = 0$ d'où la première colonne de D. De même, on a $Av = -v$ ce qui donne $\psi(v) = -v$ et on retrouve la deuxième colonne de D. Enfin, comme $Aw = w$, on a $\psi(w) = w$ et c'est bien ce qui correspond à la troisième et dernière colonne de D. On pouvait donc s'affranchir du calcul.

(5) Il faut donc calculer $\varphi(u), \varphi(v)$ et $\varphi(w)$ et exprimer ces images en fonction de u, v et w pour former la matrice C. On a

$$\varphi(u) = B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = u, \qquad \varphi(v) = B\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \qquad \varphi(w) = B\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -w$$

Il suit que

$$C = \mathrm{Mat}(\varphi, (u, v, w)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est bien diagonale. La formule de changement de base donne

$$C = P^{-1}BP \Longleftarrow B = PCP^{-1}.$$

Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, et on considère l'application

$$f : M \in E \longmapsto AM - MB.$$

(6) D'après le cours, on sait que $\dim(E) = 9$.

(7) Soit $M \in E$. Comme $A, B \in E$, on a que $f(M) = AM - MB$ est encore une matrice de E et f va bien de E dans E. De plus, si $M, N \in E$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)B \\ &= \alpha AM + \beta AN - \alpha MB - \beta NB \\ &= \alpha(AM - MB) + \beta(AN - NB) \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

et f est linéaire. Au final, f est bien un endomorphisme de E.

(8) Soit $M \in E$. On note $N = P^{-1}M\ P$, où P est P est la matrice définie dans la partie précédente.

(a) Comme $N = P^{-1}M\ P$, on a $M = PNP^{-1}$. De plus, par définition du noyau,

$$\begin{aligned} M \in \mathrm{Ker}(f) &\iff AM - MB = 0 \\ &\iff APNP^{-1} - PNP^{-1}B = 0 \\ &\iff P^{-1}APN - NP^{-1}BP = 0 \qquad \text{(on a multiplié à gauche par } P^{-1} \text{ et à droite par } P) \\ &\iff DN = NC, \end{aligned}$$

comme attendu.

(b) Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in E$. On a

$$DN = ND \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a & = & 0 \\ -c & = & 0 \\ -d & = & d \\ -e & = & 0 \\ h & = & 0 \\ i & = & -i \end{array} \right.$$

$$\iff N = \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & f \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad b, f, g \in \mathbb{R}.$$

(c) D'après ce qui précède, on peut écrire que

$$\mathcal{F} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, $\mathcal{F}$ est le sous-espace engendré par les trois matrices ci-dessus et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donc un espace vectoriel. Les trois matrices ci-dessous forment de plus une famille libre (soit on exhibe le système de l'équation de liaison qui est trivial, soit on peut aussi remarquer que c'est une sous-famille extraite de la base canonique de E). Ainsi, cette famille forme une base de $\mathcal{F}$ qui est donc de dimension 3.

(9) (a) En notant J, K, L les trois matrices ci-dessus, et avec la Question 8a., on a

$$\begin{aligned} M \in \text{Ker}(f) &\iff P^{-1}MP \in \mathcal{F} \\ &\iff P^{-1}MP = aJ + bK + cL \\ &\iff M = aPJP^{-1} + bPKP^{-1} + cPLP^{-1} \end{aligned}$$

On a alors que

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}\left(PJP^{-1};\ PKP^{-1};\ PLP^{-1}\right).$$

Il est facile de voir que cette nouvelle famille génératrice est encore libre (en factorisant dans l'équation de liaison par P à gauche et P^{-1} à droite, on a l'équation de liaison sur J, K, L qu'on sait former une famille libre). Ainsi, cette famille génératrice forme une base de $\text{Ker}(f)$ qui est donc de dimension 3. Par le *théorème du rang*, on peut déduire que

$$\text{rg}(f) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(f)) = 9 - 3 = 6.$$

(b) Comme $A - B \neq 0$ et que $A - B = f(I)$, on a un élément non nul de l'image avec $A - B$. Comme $PJP^{-1} \neq 0$ (et que cette matrice fait partie de la famille génératrice du noyau), on a un élément non nul du noyau.