ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°4

Mercredi 19 Janvier
Durée : 4 heures

Exercice 1

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(1) Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2.

(2) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 2$.
(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n).
(c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
(d) En déduire, pour tout entier naturel n, un majorant de $\ln(u_n)$.

(3) En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel $\ell \in [2, \mathrm{e}^2]$.

(4) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.
(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbf{N}}$ converge et que l'on a

$$\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(c) Vérifier, en utilisant le résultat de la question 3a), que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq \ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

(d) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

(e) Justifier que, pour tout réel x, on a $1 - \mathrm{e}^{-x} \leq x$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}.$$

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 2

On considère l'endomorphisme g de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Expliciter A^2 puis établir que $A^4 = I$.
(b) En déduire les valeurs propres possibles de A. La matrice A est-elle inversible?
(c) Donner une base (u) de $\operatorname{Ker}(g - \mathrm{Id})$. En déduire une (première) valeur propre de A.
(d) Montrer que A n'admet pas d'autre valeur propre.
(e) L'endomorphisme g est-il diagonalisable?

(2) (a) Quelle est la matrice de g^2 dans la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
(b) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et en déduire une base $(v; w)$ de $\operatorname{Ker}(g^2 + \mathrm{Id})$.
(c) Montrer que la famille $(u; v; w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(d) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$.
(e) L'endomorphisme g^2 est-il diagonalisable?

(3) On considère maintenant un endomorphisme f de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qu'on suppose diagonalisable. Montrer que f^2 l'est aussi. Que dire de la réciproque?

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 (où on suppose que $0 < p_i < 1$, pour $1 \leq i \leq 3$).

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus. Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.

On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

(1) (a) Expliciter un lien entre X, X_1, X_2 et X_3.
(b) Donner la loi de X_i, pour tout i de $\{1, 2, 3\}$.
(c) En déduire l'espérance de X, notée $E(X)$.

On note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ par

$$f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n.$$

(3) (a) On pose $p_1 = x$ et $p_2 = y$. Vérifier que $E(X) = f(x, y)$.
(b) Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

(4) (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
(b) En déduire qu'il existe un seul point A de $]0; 1[\times]0; 1[$ où f est susceptible de présenter un extremum et l'expliciter.

(5) (a) Démontrer que f présente un minimum local en ce point.
(b) Donner la valeur de $E(X)$ correspondant à ce minimum.

Problème

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F. Selon les questions, X peut être à densité ou discrète. Dans le cas où X est à densité, on notera f une densité de X.
On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Partie I - Un exemple discret

On suppose dans cette première partie, et dans cette partie uniquement, que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(1) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = 1$.

(2) (a) Montrer que

$$P(X = k) \underset{k \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2k\sqrt{k}}.$$

(b) En déduire que X n'admet pas d'espérance.

(3) Expliciter, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F(k)$.

(4) (a) Déterminer la loi de Y_2. Admet-elle une espérance?
(b) Mêmes questions avec Y_3.
(c) La loi de X est-elle implosive? Si oui, quelle est son indice d'implosion?

Partie II - Lois implosives à indice fixé

Soit $\alpha > 1$ fixé. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha}, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(5) Déterminer la valeur du réel a pour que f soit une densité de probabilité.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(6) (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
(b) Discuter, en fonction de α, l'existence de l'espérance de X.

(7) (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $F_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n$.
(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{n(\alpha-1)}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(8) Discuter, en fonction de n et de α, l'existence de l'espérance de Y_n.

(9) Conclure alors que, pour tout entier $m \geq 2$, il existe une variable aléatoire à densité dont la loi est implosive, d'indice d'implosion m.

Partie III - De l'existence de lois non implosives

(10) Montrer que, pour tout $\beta > 0$, on a

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\ln^{\beta}(x)}\right), \quad x \to +\infty.$$

En déduire la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^{\beta}(x)}$.

(11) À l'aide du changement de variable $u = \ln(x)$, déterminer un réel a tel que la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)}, & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(12) (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
(b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?

(13) Montrer, en reprenant le calcul de la Question 7a, qu'une densité de Y_n, pour $n \geq 2$, est donnée par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{n(\ln(2))^n}{x(\ln(x))^{n+1}}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(14) Conclure que la loi de X n'est pas implosive.