Devoir surveillé n°4

Solution

Exercice 1

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2010**.

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

(1) On calcule

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 + \frac{1}{2^0} = 1 + 1 = 2 \\ u_1 &= u_0 \times \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{3}{2} = 3 \\ u_2 &= u_1 \times \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) = 3 \times \frac{5}{4} = \frac{15}{4}. \end{aligned}$$

(2) (a) L'inégalité se montre facilement par récurrence. On vient de voir que $u_0 = 2$ ce qui permet de l'initialiser. Supposons alors que $u_n \geq 2$ pour un certain $n \geq 0$. En constatant que $\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq 1$, on a

$$u_{n+1} = u_n \times \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \geq u_n \geq 2,$$

et la récurrence est bien démontrée.

(b) L'inégalité obtenue à la question précédente intègre la preuve que la suite (u_n) est croissante.

(c) On a déjà obtenu cette inégalité environ 3254 fois et on omet le détail ici car à ce stade, il faut savoir le faire sans hésitation.

(d) Comme $u_n \geq 2$ pour tout $n \geq 0$, tous les termes sont en particulier strictement positifs et on peut calculer le logarithme de u_n. En combinant les propriétés du log, l'inégalité obtenue à la question précédente ainsi que la formule du calcul d'une somme des termes d'une suite géométrique, on a

$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 2.$$

(3) On revient à u_n en prenant l'exponentielle dans l'inégalité précédente. Comme de plus, $u_n \geq 2$, on a donc

$$2 \leq u_n \leq \exp(2).$$

Ainsi la suite (u_n) est croissante et majorée par 2. Le théorème de convergence monotone assure donc que la suite est convergente vers une certaine limite ℓ. Par passage à la limite dans l'encadrement ci-dessus, on voit que

$$2 \leq \ell \leq \exp(2) \iff \ell \in [2; e^2].$$

(4) On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Comme $\ell > 0$, en particulier ln est continue en ℓ donc $\ln(u_n)$ converge vers $\ln(\ell)$. De plus,

$$\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$$

donc, la série $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = \ln(\ell).$$

(b) Comme u_n et ℓ sont strictement positifs,

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) &= \ln(\ell) - \ln(u_n) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) - \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right),\end{aligned}$$

ce qu'on voulait.

(c) Comme $\ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{1}{2^k}$, alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ &= \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

(d) On a vu que la suite (u_n) était croissante donc $u_n \leq \ell$ ou encore $\ell - u_n \geq 0$. D'autre part,

$$\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}\right) = -u_n + \ell \mathrm{e}^{-\frac{1}{2^n}}.$$

Mais, on sait par la question précédente que

$$\ln\left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n} \iff \frac{\ell}{u_n} \leq e^{1/2^n}$$

ce qui permet de voir que

$$\ell - u_n e^{1/2^n} \leq 0$$

ou encore que
$$\left(-u_n + \ell \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) e^{1/2^n} \leq 0 \Longleftrightarrow -u_n + \ell \mathrm{e}^{-1/2^n}$$
(car l'exponentielle en facteur est strictement positive) et finalement, on a bien
$$\ell - u_n - \ell\left(1 - \mathrm{e}^{-1/2^n}\right) \leq 0.$$

(e) L'inégalité $1 - e^{-x} \leq x$ (pour tout réel x) est ultra-classique. On l'a déjà démontrée environ deux mille fois. On peut ici, proposer un argument de convexité. En effet, la fonction $x \longmapsto e^{-x}$ est convexe (sa dérivée seconde est strictement positive) et se trouve donc au dessus de toute ses tangentes, y compris $y = 1 - x$, tangente en 0. En appliquant cette chouette inégalité au membre de droite de l'inégalité précédente, on obtient
$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell\left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2^n}\right)\right) \leq \frac{\ell}{2^n},$$
et $\ell - u_n$ est donc majorée par un multiple du terme général d'une série géométrique convergente (de raison $1/2$). Par le critère de comparaison des séries à termes positifs, on peut conclure à la convergence de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 2012**.

On considère l'endomorphisme g de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Ces calculs sont faciles, il suffit juste de les faire
$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I.$$
Il est alors clair que $X^4 - 1$ est polynôme annulateur de A. Ainsi, les valeurs propres de A sont à chercher **parmi** les racines de $X^4 - 1$ qui sont 1 et -1:
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1; 1\}.$$

(b) On cherche une base en résolvant le système correspondant:
$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y + z &= 0 \\ 2x - 6y + 4z &= 0 \\ 3x - 8y + 5z &= 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y = z \\ &\Longleftrightarrow \quad X = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
et on a donc
$$\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En prenant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a le vecteur cherché. En particulier, 1 est bien valeur propre et $\dim(E_1) = 1$.

(c) On procède de la même manière pour déterminer $\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id})$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 0 \\ 2x - 4y + 4z & = & 0 \\ 3x - 8y + 7z & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\mathrm{Ker}(g + \mathrm{Id}) = \{0\}.$$

On voit en particulier que -1 n'est pas valeur propre de g.

(d) On connait, d'après les questions précédentes, le spectre de A; $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$. Mais comme

$$\dim(E_1) = 1 \neq 3,$$

la matrice A (ou de manière équivalente l'endomorphisme g) n'est pas diagonalisable.

(2) (a) On résout $A^2 X = -X$:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g^2+\mathrm{Id}) &\iff \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff 2x - 2y + 2z = 0 \\ &\iff X = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les deux vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

engendrent donc $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{Id})$. Étant de plus non colinéaires, ils en forment donc une base. On les note respectivement v et w.

(b) Pour montrer que la famille $\{u; v; w\}$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre.

$$\begin{aligned} \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 &\iff \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} \alpha + \beta - \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta & = & 0 \\ \alpha + \gamma & = & 0 \end{array} \right. \\ &\iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \end{aligned}$$

et la famille est bien libre et forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(c) Par définitions des vecteurs u, v, w on a $g^2(u) = g(g(u)) = g(u) = u$, $g^2(v) = -v$ et $g^2(w) = -w$. Il suit que la matrice de g^2 dans cette nouvelle base est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et c'est une matrice diagonale. Ainsi, g^2 est diagonalisable.

(3) Soit f un endomorphisme diagonalisable. Il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et que l'on peut noter D. Mais alors, la matrice de f^2 dans cette même base est D^2 qui est encore une matrice diagonale. Comme f^2 peut être représenté par une matrice diagonale, cet endomorphisme est encore diagonalisable.
Dans la première partie de cet exercice, on a travaillé avec un endomorphisme $g$vérifiant g^2 diagonalisable mais pas g, montrant ainsi que la réciproque du résultat ci-dessus est fausse.

Exercice 3

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère une épreuve aléatoire pouvant aboutir à 3 résultats différents R_1 , R_2 et R_3 de probabilités respectives p_1, p_2 et p_3 (où on suppose que $0 < p_i < 1$, pour $1 \leq i \leq 3$).

On effectue n épreuves indépendantes du type de celle décrite ci-dessus. Pour tout i de $\{1, 2, 3\}$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le résultat numéro i n'est pas obtenu à l'issue des n épreuves et 0 sinon.

On désigne par X la variable égale au nombre de résultats qui n'ont pas été obtenus à l'issue des n épreuves.

(1) (a) Il est clair que $X = X_1 + X_2 + X_3$.

(b) Pour $i \in [\![1; 3]\!]$, on introduit l'évènement $S_k(i)$ correspondant à "on n'obtient un autre résultat que R_i lors de la $k-$ième épreuve. On a donc, par indépendance des épreuves,

$$P(X_i = 1) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} S_k^{(i)}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(S_k^{(i)}) = \prod_{k=1}^{n}(1 - p_i) = (1 - p_i)^n$$

donc $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left((1 - p_i)^n\right)$.

(c) Par linéarité de l'espérance on a donc

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1) + P(X_3 = 1) \\ &= (1 - p_1)^n + (1 - p_2)^n + (1 - p_3)^n. \end{aligned}$$

On note f la fonction définie sur l'ouvert $]0, 1[\times]0, 1[$ par

$$f(x, y) = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n.$$

(3) (a) On pose $p_1 = x$ et $p_2 = y$. Comme $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, on a $1 - p_3 = p_1 + p_2 = x + y$ et donc

$$E(X) = (1 - p_1)^n + (1 - p_2)^n + (1 - p_3)^n = (1 - x)^n + (1 - y)^n + (x + y)^n = f(x, y).$$

(b) La fonction f est polynomiale; elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

(4) (a) On dérive :

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x, y) &= -n(1 - x)^{n-1} + n(x + y)^{n-1} \\ \partial_2 f(x, y) &= -n(1 - y)^{n-1} + n(x + y)^{n-1} \end{aligned}$$

(b) Le domaine $]0;1[\times]0;1[$ étant ouvert, f ne peut présenter un extremum qu'en un *point critique*. On part donc à leur recherche.

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \left\{\begin{array}{rcl} \partial_1 f(x,y) &=& 0 \\ \partial_2 f(x,y) &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -n(1-x)^{n-1}+n(x+y)^{n-1} &=& 0 \\ -n(1-y)^{n-1}+n(x+y)^{n-1} &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -n(1-x)^{n-1}+n(x+y)^{n-1} &=& 0 \\ (1-y)^{n-1} &=& (1-x)^{n-1} \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or, la fonction $t \mapsto (1-t)^{n-1}$ est bijective sur $]0;1[$ (elle est continue et strictement décroissante). Donc l'équation $(1-y)^{n-1} = (1-x)^{n-1}$ équivaut à $x = y$. Il suit que

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \left\{\begin{array}{rcl} -n(1-x)^{n-1}+n(x+y)^{n-1} &=& 0 \\ (1-y)^{n-1} &=& (1-x)^{n-1} \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} -n(1-x)^{n-1}+n(2x)^{n-1} &=& 0 \\ x &=& y \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} (2x)^{n-1} &=& (1-x)^{n-1} \\ x &=& y \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Cette fois, on utilise que la fonction $t \mapsto t^{n-1}$ est bijective sur $\mathbb{R}_+$ donc $(2x)^{n-1} = (1-x)^{n-1}$ équivaut à $2x = 1-x$ ou encore à $x = 1/3$. Ainsi, il n'y a qu'un seul point critique, c'est à dire un seul point où f est *susceptible* de présenter un extremum et ce point, noté A, a pour coordonnées $(1/3, 1/3)$.

(5) (a) Pour déterminer la *nature* du point critique, il faut connaître le signe des valeurs propres de la matrice hessienne au point A et donc on commence par calculer les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} f(x,y) &= n(n-1)\left((1-x)^{n-2}+(x+y)^{n-2}\right) \\
\\
\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial^2_{2,1} f(x,y) \qquad\qquad \text{(par Schwarz)} \\
&= n(n-1)(x+y)^{n-2} \\
\\
\partial^2_{2,2} f(x,y) &= n(n-1)\left((1-y)^{n-2}+(x+y)^{n-2}\right)
\end{aligned}$$

Il suit que

$$H = \nabla^2 f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) = n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = n(n-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} M$$

où on a posé $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On sait donc que les valeurs propres de H sont proportionnelles à celles de M et ont notamment le même signe. Mais

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M-\lambda I \text{ non inversible} \\
&\iff \det(M-\lambda I) = 0 \\
&\iff (2-\lambda)^2-1 = 0 \\
&\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 3
\end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de la matrice hessienne de f au point critique sont toutes deux strictement positives et on peut conclure que f présente en A un **minimum** local.

(b) Il suffit d'évaluer! L'espérance sera minimale pour $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ et dans ce cas on a

$$E(X) = f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Problème

Problème inspiré du sujet **ECRICOME 2015**, série S.

Dans tout l'exercice, on considère une variable aléatoire X à valeurs positives définie sur un certain espace probabilisé, de fonction de répartition F. Selon les questions, X peut être à densité ou discrète. Dans le cas où X est à densité, on notera f une densité de X.
On considère également une suite (X_n) de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi que X. On note alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$Y_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n).$$

On admet que Y_n est encore une variable aléatoire, définie sur le même espace probabilisé, et on note F_n sa fonction de répartition.

On dit que la loi de X est **implosive** si X n'admet pas d'espérance mais s'il existe un entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance. Auquel cas, on appelle **indice d'implosion** le plus petit entier $m \geq 2$ tel que Y_m admet une espérance.

Partie I - Un exemple discret

On suppose dans cette première partie, et dans cette partie uniquement, que X est une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P(X = k) = \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}.$$

(1) On calcule la limite de la somme partielle, à l'aide d'une somme télescopique. Plus précisément, Si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} P(X = k) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+2}} \qquad \text{(par télescopage)} \\
&\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien le résultat demandé.

(2) (a) On utilise l'expression conjuguée

$$\begin{aligned}
P(X=k) &= \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}} = \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \\
&= \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{(k+1)(k+2)}} \times \frac{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{k^1+3k+6}\sqrt{k}\left(\sqrt{1+2/k}+\sqrt{1+1/k}\right)} \\
&\sim \frac{1}{2k\sqrt{k}},
\end{aligned}$$

ce qui est bien l'équivalence attendue.

(b) X admet une espérance si et seulement si la série $\sum kP(X=k)$ converge (absolument). Or, d'après la question précédente,

$$kP(X=k) \sim \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Comme, d'après le critère de Riemann, la série $\sum_{k\geq 1} 1/\sqrt{k}$ diverge, on peut conclure par critère d'équivalence pour les séries, que X n'admet pas d'espérance.

(3) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$\begin{aligned}
F(k) &= P(X \leq k) = \sum_{j=0^k} P(X=j) \\
&= \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{1}{\sqrt{j+1}} - \frac{1}{\sqrt{j+2}} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{k+2}}, \qquad \text{(par télescopage)}
\end{aligned}$$

(4) (a) $Y_2 = \min(X_1, X_2)$, où X_1 et X_2 sont des variables indépendantes qui suivent la même loi que X. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(Y_2 > k) &= P(X_1 > k \cap X_2 > k) \\
&= P(X_1 > k)P(X_2 > k) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= P(X_1 > k)^2 \qquad \text{(car } X_1 \text{ et} X_2 \text{ suivent la même loi)} \\
&= (1-F(k))^2 = \frac{1}{k+2}.
\end{aligned}$$

Or,

$$P(Y_2 = k) = P(Y_2 > k-1) - P(Y_2 > k) = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k^2}.$$

Donc la série $\sum kP(Y_2 = k)$ diverge (son terme général est équivalent à la série harmonique).

(b) On reprend la méthode précédente.

$$\begin{aligned}
P(Y_3 > k) &= P(X_1 > k \cap X_2 > k \cap X_3 > k) \\
&= P(X_1 > k)P(X_2 > k)P(X_3 > k) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= P(X_1 > k)^3 \qquad \text{(car } X_1, X_2, X_3 \text{ suivent la même loi)} \\
&= (1-F(k))^3 = \frac{1}{(k+2)\sqrt{k+2}}.
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{array}{rcl} P(Y_3 = k) & = & P(Y_3 > k-1) - P(Y_3 > k) \\ & = & \dfrac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}} - \dfrac{1}{(k+2)\sqrt{k+2}} \\ & = & \dfrac{(k+2)^3 - (k+1)^3}{(k+1)(k+2)\sqrt{(k+1)(k+2)}\left((k+2)\sqrt{k+2} + (k+1)\sqrt{k+1}\right)} \\ & \sim & \dfrac{3k^2}{2k^3k^{3/2}} = \dfrac{3}{2k^{5/2}} \end{array}$$

Il suit que

$$kP(Y_3 = k) \sim \frac{3}{2k^{3/2}}$$

et, par équivalence à une série de Riemann convergente, Y_3 admet une espérance.

(c) X n'admet pas d'espérance, Y_2 non plus mais Y_3 oui. Donc, la loi de X est implosive et son indice d'implosion vaut 3.

Partie II - Lois implosives à indice fixé

Soit $\alpha > 1$ fixé. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \dfrac{a}{x^\alpha}, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

(5) Pour que f soit positive ou nulle sur $\mathbb{R}$, il faut déjà imposer que $a \geq 0$. Sur chacun des deux intervalles définissant f, celle-ci est continue (comme fonction constante d'une part, et comme inverse d'un polynôme qui ne s'annule pas d'autre part). Il reste à vérifier et à choisir a de sorte que l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$ soit convergente et soit égale à 1. Comme f est nulle sur $]-\infty; 1[$, on se ramène à l'intégrale sur $[1; +\infty[$. Soit $A > 1$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_1^A f(x)\mathrm{d}x & = & \displaystyle\int_1^A \frac{a\mathrm{d}x}{x^\alpha} \\ & = & \left[-\dfrac{a}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^A \\ & = & \dfrac{a}{\alpha-1} - \dfrac{a}{(\alpha-1)A^{\alpha-1}} \\ & \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} & \dfrac{a}{\alpha-1} \end{array}$$

car $\alpha > 1$. Ainsi, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \alpha - 1$.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(6) (a) Si $x < 1$, alors $F(x) = P(X \leq x) = 0$. Soit donc $x \geq 1$.

$$\begin{array}{rcl} F(x) & = & P(X \leq x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\mathrm{d}t \\ & = & 1 - \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}. \end{array}$$

Au final,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(b) Comme f est nulle en dehors de $[1;+\infty[$,

$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{(\alpha-1)\mathrm{d}x}{x^{\alpha-1}} \text{ converge} \\ &\iff \alpha - 1 > 1 \qquad \text{(par critère de Riemann)} \\ &\iff \alpha > 2. \end{aligned}$$

(7) (a) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(Y_n \leq x) = 1 - P(Y_n > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x) \cap \cdots \cap (X_n > x)) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^{n} P(X_k > x) \qquad \text{(par indépendance des } X_k\text{)} \\ &= 1 - (1 - F(x))^n \qquad \text{(car les } X_k \text{ suivent toutes la même loi que } X\text{)} \end{aligned}$$

(b) En utilisant le résultat trouvé ci-avant, comme $1 - F(x) = 1$ si $x < 1$ et $1 - F(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ si $x \geq 1$, on a bien

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ 1 - \dfrac{1}{x^{n(\alpha-1)}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

(8) D'après la question précédente, on voit que Y_n est une variable à densité (F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sur chacun des deux intervalles). Une densité est donnée par $f_n = F_n'$ c'est à dire

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{n(\alpha-1)}{x^{n(\alpha-1)+1}}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Y_n \text{ admet une espérance} &\iff \int_1^{+\infty} xf_n(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \int_1^{+\infty} \frac{n(\alpha-1)}{x^{n(\alpha-1)}}\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff n(\alpha-1) > 1 \qquad \text{(par critère de Riemann)} \\ &\iff \alpha > \frac{1}{n} + 1 \end{aligned}$$

(9) Soit $m \geq 2$. On veut donc trouver une variable aléatoire X qui n'admet pas d'espérance telle que Y_{m-1} n'en admette pas non plus, mais avec Y_m qui admet une espérance. D'après les questions précédentes, il suffit de prendre X qui de densité f avec

$$\alpha = \frac{1}{m} + 1 = \frac{m+1}{m}.$$

On remarque en effet que ce choix de α garantit que X n'admet pas d'espérance (car $\alpha \leq 3$) et que m est bien le plus petit indice n tel que Y_n admette une espérance.

Partie III - De l'existence de lois non implosives

(10) C'est tout simplement un résultat de croissance comparée

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\beta(x)}{x} = 0.$$

Ainsi, on a ben

$$\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{\ln^\beta(x)}\right), \quad x \to +\infty.$$

Comme
$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
diverge (critère de Riemann), le critère de comparaison par négligeabilité pour les intégrales (qu'on a plutôt l'habitude d'utiliser dans l'autre sens !) permet d'affirmer que l'intégrale
$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln^\beta(x)}.$$
diverge.

(11) Soit f définie par
$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2, \\ \dfrac{a}{x\ln^2(x)}, & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$
Comme précédemment, il est tout d'abord nécessaire que $a \geq 0$. Les deux morceaux définissant cette fonction sont bien continus sur leurs intervalles respectifs (fonction constante et inverse du produit de fonctions usuelles de s'annulant pas). Soit $A > 2$. On suit la recommandation du changement de variable $u = \ln(t)$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2; A]$ donc licite). La formule de changement donne notamment
$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{t}$$
pour enfin écrire
$$\begin{aligned} \int_2^A \frac{a}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t\mathrm{d}t &= \int_{\ln(2)}^{\ln(A)} \frac{a\mathrm{d}u}{u^2} \\ &= \left[-\frac{a}{u}\right]_{\ln(2)}^{\ln(A)} \\ &= \frac{a}{\ln(2)} - \frac{a}{\ln(A)} \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{\ln(2)}. \end{aligned}$$
Il suit que f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \ln(2)$.

Dans la suite de cette partie, X est une variable aléatoire admettant f comme densité.

(12) (a) Sans difficulté. Si $x < 2$, alors $F(x) = 0$. Si $x \geq 2$
$$F(x) = \int_2^x \frac{\ln(2)}{t\ln^2(t)}\mathrm{d}t = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(x)}.$$
Au final, on a
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
(b) Comme précédemment,
$$\begin{aligned} X \text{ admet une espérance} &\iff \int_2^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \int_2^{+\infty} \frac{\ln(2)\mathrm{d}x}{\ln(x)} \text{ converge} \end{aligned}$$
Or cette intégrale diverge d'après la Question 10 avec $\beta = 1$. Donc X n'admet pas d'espérance.

(13) En reprenant les calculs de la Question 7a, on a $F_n(x) = 1-(1-F(x))^n$ donc

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ 1 - \left(\dfrac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)^n, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

La fonction F_n ayant les "bonnes propriétés", Y_n est bien une variable à densité et une densité s'obtient en dérivant F_n ce qui donne bien

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 2 \\ \dfrac{n(\ln(2))^n}{x(\ln(x))^{n+1}}, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

(14) Il suit alors que

$$\begin{aligned} Y_n \text{ admet une espérance} &\iff \int_2^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \text{ converge} \\ &\iff \int_2^{+\infty} \frac{n(\ln(2))^n}{(\ln(x))^{n+1}}\mathrm{d}x \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, cette intégrale diverge (Question 10 avec $\beta = n+1$). Ainsi, la loi de X n'est pas implosive.