ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°5 - Sujet A

Samedi 5 Février
Durée : 4 heures

Exercice 1

Partie I - Réduction

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice est A, dans la base canonique notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(1) Déterminer le noyau et l'image de φ. En déduire que 0 est valeur propre de φ.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de φ et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) On introduit les vecteurs

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer la matrice A' de φ dans cette base.

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

(a) Que représentent les vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique forment les colonnes de P, pour l'endomorphisme φ ?
En déduire notamment, sans pivot, que P est inversible.

(b) Calculer, en fonction de α, β et γ, le produit $P\,{}^tP$.
En déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$. *On ne cherchera pas forcément à résoudre complètement l'équation mais à montrer qu'elle admet des solutions.*

On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice, c'est à dire qu'on choisit pour toute la fin de l'exercice α, β et γ de sorte que ${}^tP = P^{-1}$.

(c) Justifier alors que $A = P \cdot A' \cdot {}^t P$.

Partie II - Fonctions de plusieurs variables

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\quad {}^tX = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^tX \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$

(b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^tP \cdot X)$ est $({}^tX \cdot P)$.

(c) En déduire que

$$g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2, \qquad \text{où on a posé} \quad {}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g(x, y, y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

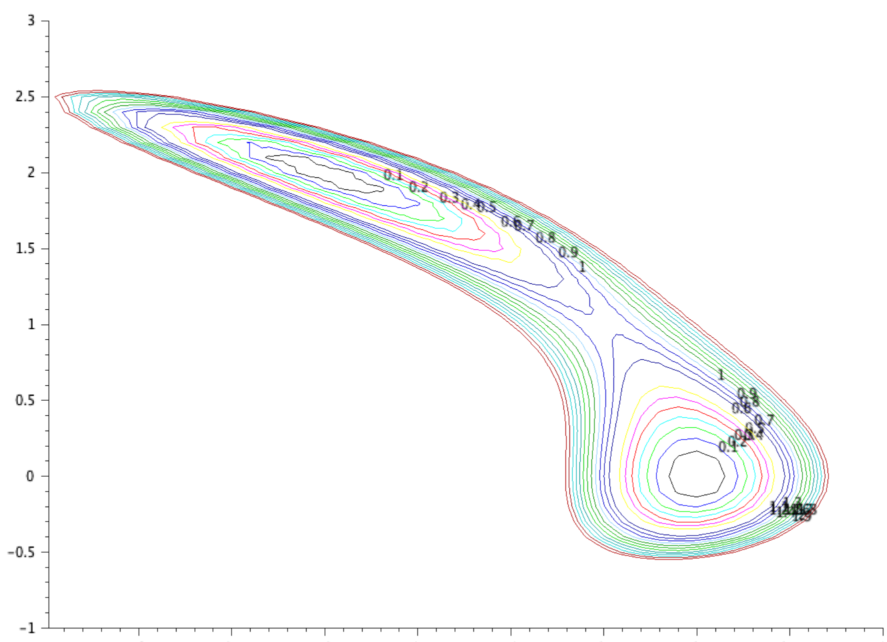
(a) Expliciter $f(x, y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Compléter la fonction SciLab ci-dessous pour qu'elle renvoie $f(x, y)$.

```
function z=f(x,y)
    z=....................
endfunction
```

(c) Déterminer les points critiques de f.

(d) Quelles instructions SciLab ont permis d'obtenir la figure ci-dessous? Que représente-t-elle? Que peut-on conjecturer à propos de la nature des points critiques trouvés à la question précédente?



(e) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?

(f) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0, 0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

Partie I - Étude d'une (suite de) fonction(s)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

(1) (a) Étudier les variations de la fonction g_0.
On précisera la limite de g_0 en $+\infty$, ainsi que l'équation de la tangente en 0.
(b) Donner l'allure de la courbe représentative de g_0.

(2) (a) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$g_n'(x) \geqslant 0 \quad \iff \quad n \geqslant 2\ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.

(b) Calculer soigneusement $\lim\limits_{x \to +\infty} g_n(x)$.
(c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer la limite de M_n lorsque n tend vers $+\infty$.
(d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$,

$$g_n(x) = o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right), \quad x \to +\infty.$$

Partie II - Étude d'une suite d'intégrales

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t.$$

(3) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
(4) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
(5) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(6) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = n!.$$

Partie III - Une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{g_n(x)}{n!}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(7) Montrer que g_n peut être considérée comme une densité de probabilité.
On note X_n une v.a de densité g_n et F_n sa fonction de répartition.

(8) La variable aléatoire X_n admet-elle une densité?
(9) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x < 0$, $F_n(x)$.
(10) Déterminer, pour $x \geq 0$, $F_0(x)$.

(11) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}.$$
(12) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme qu'on ne cherchera pas à calculer.
(13) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
(14) La suite de variables aléatoires (X_n) converge-t-elle en loi?

(15) On introduit alors la variable $Y_n = \ln(1 + X_n)$.
  (a) Justifier que Y_n est bien définie, puis que $Y_n(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

  (b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.
  (c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.
  (d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$H_n(x) = F_n(e^x - 1).$$
  (e) En déduire que Y_n est une variable à densité et préciser une densité de Y_n.
  (f) Reconnaître la loi de Y_0. Déduire de la Partie II que Y_0 admet, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, un moment d'ordre k et préciser sa valeur.

Exercice 3

Une personne commande son dîner en ligne une fois par semaine, sur trois sites plateformes différentes (que l'on note A, B et C) de manière aléatoire selon le protocole suivant:

- La première semaine, chaque plateforme a la même probabilité d'être choisie;
- La plateforme A étant la meilleure mais la plus chère, elle ne commande jamais deux fois de suite sur celle-ci;
- Si elle commande une certaine semaine *via* la plateforme A, elle commandera la semaine suivante sur B ou C avec autant de chance;
- Si elle commande une certaine semaine *via* B ou C, il y a une chance sur deux qu'elle change de plateforme la semaine suivante et dans ce cas, une chance sur 2 pour qu'elle utilise la plateforme A.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 (resp. 2, resp. 3) si la plateforme A (resp. B, resp. C) a été choisie lors de la $n-$ième commande. La suite de variables aléatoire (X_n) est alors appelée *chaîne de Markov.*

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n le vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

(1) (a) Quelle est la loi de X_1? Préciser son espérance et sa variance.
  (b) Proposer une instruction `SciLab` permettant de simuler X_1.

(2) Représenter, en justifiant, le diagramme de transition de la *chaîne* (X_n).
(3) Déterminer soigneusement, en citant les résultats utilisés, une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait
$$U_{n+1} = AU_n.$$
(4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $U_n = A^{n-1}U_1$.
(5) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous pour qu'elle renvoie *trajectoire* des n premières simulations de $X_1, X_2, ..., X_n$.

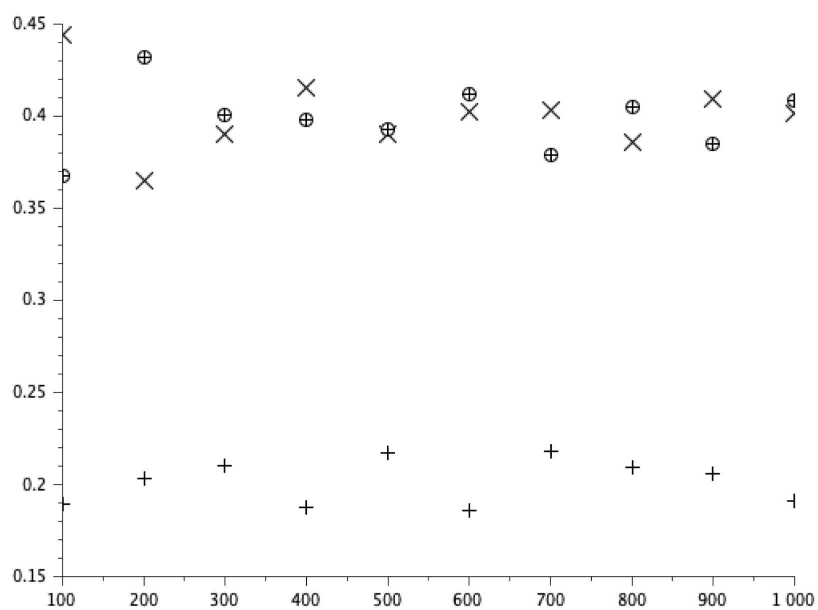
```
function X=chaine(n)
        A=[........................]/4
        x1=..........
        X=[x1, grand(....., 'markov', A', .....)]
endfunction
```

(6) (a) On utilise la fonction de la question précédente pour écrire le programme ci-dessous. Que fait-il?

```
function T=mystere(n)
    T=[0,0,0]
    for k=1:1000
        X=chaine(n)
        T(X(n))=T(X(n))+1
    end
    T=T/1000
endfunction
```

(b) On ajoute les lignes suivantes dont l'exécution permet d'afficher la figure ci-contre. Interpréter. Que peut-on conjecturer pour le comportement de X_n? Que peut-on en déduire quant aux éléments propres de la matrice A?

```
M=zeros(10, 3)
for k=1:10
    M(k,:)=mystere(100*k)
end
plot2d(100:100:1000, M(:, 1), -1)
plot2d(100:100:1000, M(:, 2), -2)
plot2d(100:100:1000, M(:, 3), -3)
```



(7) (a) Vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A. On précisera la valeur propre associée.

(b) La commande

```
(16*A^2-eye(3,3))*(A-eye(3,3))
```

renvoie

```
ans  =

   0.   0.   0.
   0.   0.   0.
   0.   0.   0.
```

En déduire deux autres valeurs propres possibles de A.

(c) Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien valeurs propres de A, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice D diagonale (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

(d) Inverser P.

(e) Calculer explicitement A^n et en déduire la loi de X_n.

(f) Conclure que (X_n) converge en loi vers une variable Z que l'on explicitera. Est-ce cohérent avec ce qu'on avait précédemment observé?