ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°5 - Sujet A

Solution

Exercice 1

Partie I - Réduction

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}$ dont la matrice est A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

(1) On résout

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker(\varphi) \quad &\iff \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \quad \begin{cases} 4x + 2z & = & 0 \\ 4y - 2z & = & 0 \\ 2x - 2y + 2z & = & 0 \end{cases} \\ &\iff \quad \begin{cases} z & = & 2x \\ y & = & -x \\ 0 & = & 0 \end{cases} \end{aligned}$$

donc

$$\ker(\varphi) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Comme $\ker(\varphi) \neq \{0\}$ alors 0 est valeur propre de φ. De plus, comme $\dim(\ker(\varphi)) = 1$, le théorème du rang donne $\dim(\text{Im}(\varphi)) = 3 - 1 = 2$. Remarquant que $\varphi(e_1) = (4, 0, 2)$ et $\varphi(e_2) = (0, 4, -2)$ forment une famille libre de 2 vecteurs, elles forment donc une base de l'image et on peut écrire

$$\text{Im}(\varphi) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

(2) (a) Comme A est symétrique, elle A est diagonalisable.

(b) On résout :

$$(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2z & = & 0 \\ -2z & = & 0 \\ 2x-2y-2z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x & = & y \end{array}\right. .$$

Donc 4 est valeur propre de φ et son sous espace propre associé est $E_4 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

$$(A-6I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} -2x+2z & = & 0 \\ -2y-2z & = & 0 \\ 2x-2y-4z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & z \\ y & = & -z \end{array}\right. .$$

Donc 6 est valeur propre de φ et son sous espace propre associé est $E_6 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

(c) On a $u_1 = -(1,-1,2) \in \ker(\varphi) = E_0$. $b' = (u_1, u_2, u_3)$ est une famille de vecteur propres associés à des valeurs propres distinctes donc une famille libre (par concaténation des sous-espaces propres) de 3 vecteurs ; et donc une base de $\mathbb{R}^3$.
Comme $\varphi(e_1) = 0 : \varphi(e_2) = 4e_2 : \varphi(e_3) = 6e_3$ alors la matrice de φ dans cette base est

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$

(a) Les colonnes de P sont des multiples non nuls de trois vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes. Toujours par concaténation, ils forment donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}$. Donc P est inversible.

(b) On remonte ses manches et on vérifie qu'il y a des solutions

$$\begin{array}{rcl} P\cdot {}^tP & = & \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ \beta & \beta & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & -2\alpha^2+\gamma^2 \\ -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & 2\alpha^2-\gamma^2 \\ -2\alpha^2+\gamma^2 & 2\alpha^2-\gamma^2 & 4\alpha^2+\gamma^2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} P\cdot {}^tP = I & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcll} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & = & 1 & L_1 \\ -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2 & = & 0 & L_1+L_2 \\ -2\alpha^2+\gamma^2 & = & 0 & L_3 \\ 4\alpha^2+\gamma^2 & = & 1 & L_4-L_3 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & = & 1 \\ 2\beta^2 & = & 1 \\ -2\alpha^2+\gamma^2 & = & 0 \\ 6\alpha^2 & = & 1 \end{array}\right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{rcl} \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 & = & 1 \\ \beta & = & \pm 1/\sqrt{2} \\ \gamma & = & \pm 1/\sqrt{3} \\ \alpha & = & \pm 1/\sqrt{6} \end{array}\right. \end{array}$$

Comme $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6} = 1$ la première équation est alors vérifiée. Donc en prenant $\alpha = 1/\sqrt{6} : \beta = 1/\sqrt{2}$ et $\gamma = 1/\sqrt{3}$ on a $P\cdot {}^tP = I$ donc ${}^tP$ est l'inverse de P.

(c) A' est la matrice de φ dans $\mathcal{B}'$ donc d'après la formule de changement de base, avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ dans $\mathcal{B}$ on a $A = P \cdot A' \cdot P^{-1} = P \cdot A' \cdot {}^tP$

Partie II - Fonctions de plusieurs variables

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^tX = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) On calcule

$$\begin{aligned} {}^tX \cdot A \cdot X &= {}^tX \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4x + 2z \\ 4y - 2z \\ 2x - 2y + 2z \end{pmatrix} \\ &= 4x^2 + 4xz + 4y^2 - 4yz + 2z^2 \\ &= g(x, y, z). \end{aligned}$$

(b) On vérifie

$${}^tP \cdot X = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & 2\alpha \\ \beta & \beta & 0 \\ \gamma & -\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x + \alpha y + 2\alpha z \\ \beta x + \beta y \\ \gamma x - \gamma y + \gamma z \end{pmatrix}$$

et, d'autre part,

$${}^tX \cdot P = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha x + \alpha y + 2\alpha z & \beta x + \beta y & \gamma x - \gamma y + \gamma z \end{pmatrix}.$$

Donc elles sont transposées l'une de l'autre. On a alors

$$\begin{aligned} {}^tX \cdot A \cdot X &= {}^tX \cdot P \cdot A' \cdot {}^tP \cdot X \\ &= \left({}^tX\, P\right) A' \left({}^tP\, X\right) \\ &= \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \\ &= 4y'^2 + 6z'^2, \end{aligned}$$

donc $g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2$.

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = g(x, y, y^2), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Par définition

$$\begin{aligned} f(x, y) &= g(x, y, y^2) = 4x^2 + 4x \cdot y^2 + 4y^2 - 4y \cdot y^2 + 2(y^2)^2 \\ &= 4x^2 + 4xy^2 + 4y^2 - 4y^3 + 2y^4. \end{aligned}$$

On constate que f est polynomiale et est donc $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Pour déterminer les points critiques de f, il faut voir où le gradient s'annule et commencer par déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f:

$$\begin{aligned}\partial_1 f(x,y) &= 8x+4y^2\\ \partial_2 f(x,y) &= 8xy+8y-12y^2+8y^3\end{aligned}$$

Il suit que

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \left\{\begin{array}{rcl} 8x+4y^2 &=& 0\\ 8xy+8y-12y^2+8y^3 &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} 8x &=& -4y^2\\ y(8x+8-12y+8y^2) &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} 8x &=& -4y^2 & (L_1)\\ 4y(2-3y+y^2) &=& 0 & (L_2)\end{array}\right.$$

Or,

$$(L_2) \iff (y=0 \quad \text{ou} \quad y=1 \quad \text{ou} \quad y=2)$$

En remplaçant dans (L_1) on trouve donc trois points critiques

$$(0,0), \qquad \left(-\frac{1}{2},1\right), \qquad (-2,2).$$

(c) Sans difficulté, on complète la ligne manquante

```
function z=f(x,y)
    z=4*x^2 +4*x*y^2+4*y^2-4*y^3+2*y^4
endfunction
```

(d) La figure représente les *lignes de niveau* de f sur le domaine $[-3.5;1]\times[-1;3]$ avec des niveaux représentés avec un pas de 0.1, une valeur minimale de 0 et une valeur maximale d'au moins 1. La figure ne permet pas le lire lisiblement les valeurs des autres niveaux même si, en comptant le nombre de lignes, on peut penser qu'on a représenté les niveaux jusqu'a 2.
La commande correspondante est donc

```
contour(-3.5:0.1:1, -1:0.1:3, f, 0:0.1:2)
```

On peut conjecturer à la présence de deux minimums (locaux) qui devraient correspondre aux points critiques $(-2,2)$ et $(0,0)$ ce qui laisse penser que le troisième point critique, de coordonnées $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ serait un point col.

(e) Pour former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents, il faut commencer par calculer les dérivées partielles d'ordre 2

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1} f(x,y) &= 8\\ \partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial^2_{2,1} f(x,y) = 8y\\ \partial^2_{2,2} f(x,y) &= 8x+8-24y+24y^2\end{aligned}$$

Il suit que

$$H_1 = \nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}$$

Cette matrice étant diagonale, ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux qui sont tous deux strictement positifs; on peut conclure en la présence d'un minimum local en $(0,0)$.

$$H_2 = \nabla^2 f(-2,2) = \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 16 & 40 \end{pmatrix}$$

On peut alors voir (relativement long et un peu fastidieux) que cette matrice admet pour valeurs propres $24 \pm 16\sqrt{2}$ qui sont toutes deux strictement positives (on cherche les racines du déterminant de $H_2 - \lambda I_2$) donc on peut encore conclure en la présence d'un minimum local en $(-2,2)$. Enfin,

$$H_3 = \nabla^2 f\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

a pour valeurs propres les racines de $(8-\lambda)(4-\lambda) - 64 = 0$ qui sont $\lambda = 6 \pm 2\sqrt{17}$ dont l'une est strictement positive et l'autre strictement négative. Ainsi, f présente un point selle en $(-1/2; 1)$.

(f) Comme $g(x,y,z) = 4y'^2 + 6z'^2 \geq 0$ et que $f(0,0) = 0$, il suit que $f(x,y) \geq f(0,0)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et f présente donc un minimum global en $(0,0)$.

Exercice 2

Cet exercice est extrait du sujet **ECRICOME 2016**.
Une solution, proposée par Martin Canu et Laurent Carrot est disponible en cliquant sur ce lien.

Exercice 3

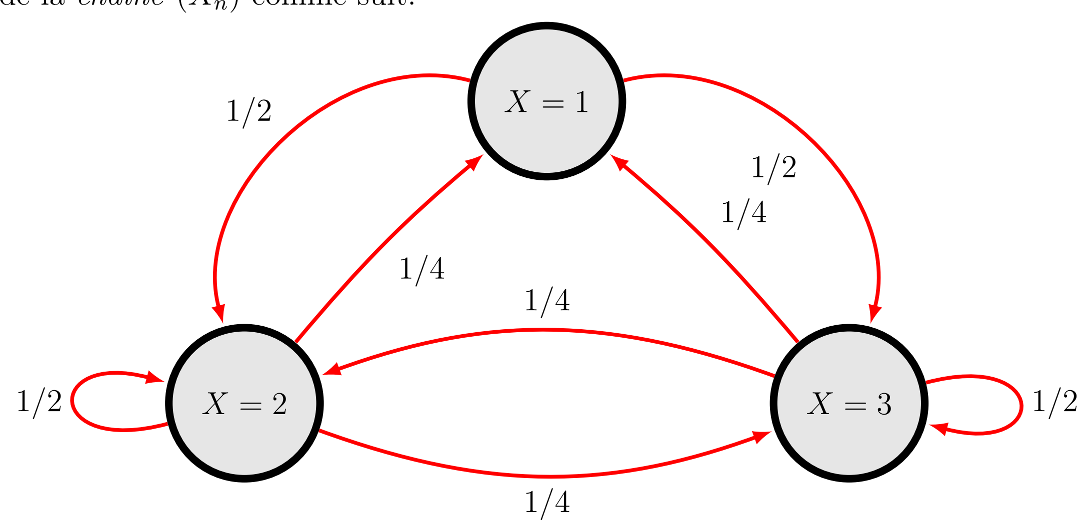
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n le vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3 \end{pmatrix}$.

(1) (a) Le premier soir, chaque plateforme étant choisie avec la même probabilité, on a clairement $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1; 3 \rrbracket)$. Ilsuit, d'après le cours que

$$E(X_1) = 2, \qquad V(X_1) = \frac{(3-1)^2 - 1}{12} = \frac{1}{4}.$$

(b) La commande `grand(1,1, 'uin', 1, 3)` fait le job.

(2) La description des règles d'évolution de la chaîne de l'énoncé permet de représenter le diagramme de transition de la *chaîne* (X_n) comme suit.



En effet, comme on ne peut pas commander deux fois de suite chez A, on a $P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=1)=0$ et il n'y a pas d'arête du sommet $X=1$ vers lui-même.
Si le soir n on commande sur A, alors la fois d'après ça sera B ou C dans un cas sur deux, ce qui s'écrit

$$P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=2)=P_{[X_n=1]}(X_{n+1}=3)$$

et justifie les deux arêtes affectés du coefficient $1/2$ qui vont du sommet $X=1$ vers le sommet $X=2$ et du sommet $X=1$ vers le sommet $X=3$. Le reste se justifie de la même manière et on omet volontairement tous les détails.

(3) On exprime les probabilités de la loi de X_{n+1} en fonction de celles de la loi de X_n grâce à la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{[X_n=i]:\ i\in[\![1;3]\!]\}$. Ceci permet ensuite de reformuler ces relations de récurrence en une récurrence matricielle. Plus précisément,

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=1) &= \sum_{i=1}^{3} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=1)P(X_n=i) \\ &= \frac{1}{4}\left(P(X_n=2)+P(X_n=3)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=2) &= \sum_{i=1}^{3} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=2)P(X_n=i) \\ &= \frac{1}{2}(P(X_n=1)+P(X_n=2)+\frac{1}{4}P(X_n=3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{n+1}=3) &= \sum_{i=1}^{3} P_{[X_n=i]}(X_{n+1}=3)P(X_n=i) \\ &= \frac{1}{2}(P(X_n=1)+P(X_n=3)+\frac{1}{4}P(X_n=2) \end{aligned}$$

Ceci se réécrit comme $U_{n+1}=AU_n$ avec

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(4) C'est une récurrence facile.

- <u>initialisation.</u> Pour $n=1$, comme $A^{1-1}=A^0=I$, c'est bien sûr vérifié.
- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain entier $n\geq 1$, on ait $U_n=A^{n-1}U_1$. Alors, d'après la question précédente,

$$U_{n+1}=AU_n \underset{\text{HR}}{=} A\cdot A^{n-1}U_1=A^nU_1,$$

ce qui est bien la relation au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(5) Le premier terme de la trajectoire, X_1, se simule par une loi uniforme et la commande ci-avant; il faut donc simuler avec `grand('markov')` les $n-1$ termes suivants (et pas n), et ajouter l'état initial à la liste.

```
function X=chaine(n)
        A=[0,1,1; 2,2,1; 2,1,2]/4
        x1=grand(1,1, 'uin', 1, 3)
        X=[x1, grand(n-1, 'markov', A', x1)]
endfunction
```

(6) (a) On utilise la fonction de la question précédente pour écrire le programme ci-dessous.

```
function T=mystere(n)
    T=[0,0,0]
    for k=1:1000
        X=chaine(n)
        T(X(n))=T(X(n))+1
    end
    T=T/1000
endfunction
```

Ce programme renvoie la liste des fréquences de passages de X_n en chacun des trois états possibles sur 1000 réalisations de X_n.

(b) Les lignes ajoutées ont permis de représenter trois suites. Celle représentée par des + correspond à la suite des fréquences de passage par l'état 1 de X_n pour des valeurs de n entre 100 et 1000 (avec un pas de 100). Pour celle représentée par des $\times$, il s'agit des fréquences successives de passage à l'état 2 et pour les $\oplus$ c'est pour l'état 3.
L'évolution de ces fréquences en fonction de n semble vouloir mettre en évidence une convergence en loi. En effet, il semblerait que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z,$$

où

$$P(Z=1)=0.2, \qquad P(Z=2)=P(Z=3)=0.4$$

En notant

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

on peut alors conjecturer qu'il s'agit d'un vecteur propre pour A associé à la valeur propre 1.

(7) (a) Le calcul donne bien $AV=V$, donc V est bien vecteur propre de A associé à la valeur propre 1.

(b) La commande

```
(16*A^2-eye(3,3))*(A-eye(3,3))
```

renvoie une matrice nulle. On en déduit que le polynôme $(X-1)(16X^2-1)$ annule A. Ainsi, les valeurs propres de A sont à chercher parmi les racines de ce dernier qui sont 1, $1/4$ et $-1/4$. On peut affirmer que

$$\{1\} \subset \mathrm{Sp}(A) \subset \left\{1,\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right\}.$$

(c) Il s'agit ici de résoudre deux système. On y va.

- Pour $1/4$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(A - \frac{1}{4}I\right) \iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ 2x+y+z & = & 0 \\ 2x+y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -x+y+z & = & 0 \\ 3y+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0 \\ y & = & -z \end{array}\right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $1/4$ est bien valeur propre de A et $E_{1/4} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

- Pour $-1/4$:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}\left(A + \frac{1}{4}I\right) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ 2x+3y+z & = & 0 \\ 2x+y+3z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ y-z & = & 0 \\ -y+z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2z \\ y & = & z \end{array}\right.$$

$$\iff X = \begin{pmatrix} -2z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $-1/4$ est bien valeur propre de A et $E_{-1/4} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a trois valeurs propres distinctes. La matrice A est bien diagonalisable. Par concaténation, la famille

$$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, V\right)$$

forme une base de vecteurs propres de A. En notant

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de base permet d'affirmer que

$$A = PDP^{-1}.$$

(d) Un pivot de Gauss opéré simultanément sur P et sur I permet d'obtenir

$$P^{-1} = \frac{4}{10}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(e) Comme on a $A = PDP^{-1}$, une récurrence donne immédiatement

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

On remonte ses manches, on inspire un bon coup et hop! c'est parti.

$$\begin{aligned}
A^n &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/4)^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2(-1/4)^n & 0 & 1 \\ (-1/4)^n & -(1/4)^n & 2 \\ (-1/4)^n & (1/4)^n & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 2+8(-1/4)^n & 2-2(-1/4)^n & 2-2(-1/4)^n \\ 4-4(-1/4)^n & 4+5(1/4)^n+(-1/4)^n & 4-5(1/4)^n+(-1/4)^n \\ 4-4(-1/4)^n & 4-5(1/4)^n+(-1/4)^n & 4+5(1/4)^n+(-1/4)^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Désagréable, on l'admet. Pour avoir la loi de U_n il faut en fait prendre la puissance $n-1$ et appliquer cette matrice au vecteur U_1, ce qui revient à additionner les 3 colonnes et à diviser par 3. On obtient finalement, à la force du poignet

$$U_n = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6+4(-1/4)^{n-1} \\ 12-2(-1/4)^{n-1} \\ 12-2(-1/4)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

(f) En regardant la limite composante par composante du vecteur précédent, on a

$$U_n \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6+4(-1/4)^{n-1} \\ 12-2(-1/4)^{n-1} \\ 12-2(-1/4)^{n-1} \end{pmatrix} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{30}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \Pi,$$

où ce vecteur est celui qui porte la distribution de la variable Z introduite après affichage des résultats de simulation sous `SciLab`. On a bien la convergence de loi de X_n vers Z.