ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°5 - Sujet B

Samedi 5 Février
Durée : 4 heures

Exercice 1

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x et y deux réels de l'intervalle $]0;1[$. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,y)$ et on définit ensuite la variable aléatoire Z en posant

$$Z = 2n - X - Y.$$

(1) On introduit aussi la variable aléatoire W définie par $W = XYZ$. Montrer que l'espérance de W est donnée par

$$E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y).$$

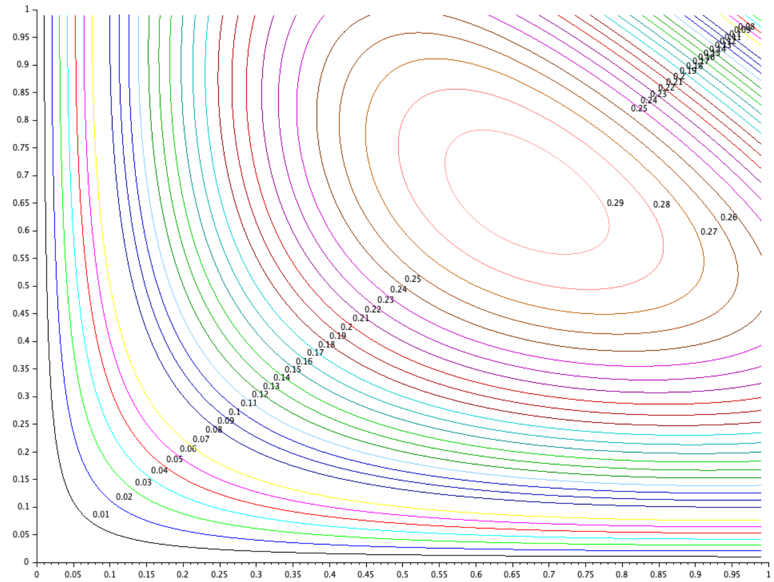
(2) On pose $D =]0;1[\times]0;1[$. On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on définit, pour $(x,y) \in D$, la fonction f par

$$f(x,y) = xy(2-x-y).$$

  (a) Représenter graphiquement le domaine D.
  (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.
  (c) Montrer qu'il existe un unique point A de D où f est susceptible de présenter un extremum.
  (d) Montrer que f présente bien un extremum local en A. Préciser sa nature et sa valeur.
  (e) Le script `SciLab` suivant donne la représentation ci-dessous. Est-ce cohérent avec l'étude précédente? Expliquer.

```
function z=f(x,y)
    z=x*y*(2-x-y)
endfunction

x=0.01:.01:.99
y=x;
contour(x,y,f,[0:.01:0.3])
```



(f) Quelles commandes pourrait-on ajouter au script précédent pour représenter la surface de f sur D?

(g) Calculer

$$\frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right)-y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2.$$

(h) En déduire que l'extremum local trouvé précédemment est finalement un extremum global.

Exercice 2

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$M\left(a\right)=\begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $M\left(0\right)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.
Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a>0$.

(2) Montrer que les valeurs propres de $M\left(a\right)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2=\left(a-1\right)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2+a\lambda+1=0.$$

(3) (a) Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $M\left(a\right)$ n'est pas inversible.
(b) Pour cette valeur, dire si $M\left(a\right)$ est diagonalisable.

(4) On suppose dans cette question que $a>2$.

(a) Montrer que $M\left(a\right)$ possède 4 valeurs propres distinctes.
(b) En déduire que $M\left(a\right)$ est diagonalisable.

Exercice 3

Pour n entier tel que $n \geq 2$, on introduit l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 (-\ln(x))^{n-1} \mathrm{d}x$$

(1) Montrer que J_2 converge et préciser sa valeur.
(2) Montrer par récurrence et à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout entier $n \geq 2$, J_n converge et $J_{n+1} = nJ_n$.
(3) En déduire l'expression, en fonction de n, de J_n.

On définit alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-\ln(x))^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } x \in]0;1[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(4) Montrer que f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.
On note X_n une variable aléatoire de densité f_n et, dans toute la suite, F_n la fonction de répartition de F_n.

(5) Reconnaître la variable X_1. Préciser son espérance, sa variance et l'expression de sa fonction de répartition F_1. Que vaut $E(X_1^2)$?

(6) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet espérance et variance (qu'on ne calculera pas dans cette question).
(b) À l'aide d'une intégration par parties, exprimer $E(X_{n+1})$ en fonction de $E(X_n)$. En déduire l'expression de $E(X_n)$ en fonction de n.
(c) De la même manière, exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_{n+1}^2)$ en fonction de $E(X_n^2)$. En déduire que

$$V(X_n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

(7) Montrer que, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $x \in]0;1[$,

$$F_n(x) = \frac{x(-\ln(x))^{n-1}}{(n-1)!} + F_{n-1}(x).$$

(8) En déduire, pour $x \in]0;1]$, l'expression de $F_n(x)$ faisant intervenir une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
(9) Montrer alors la convergence en loi de (X_n) vers une variable aléatoire certaine dont on précisera la valeur.

Problème

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x \in]0;1[$. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t,$$
où $f^{(0)} = f$ et, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}$ désigne la dérivée $k-$ième de f.
(*On pourra s'aider d'une intégration par parties.*)

(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\forall x \in [0;1[, \qquad f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0,1[$,
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(3) Soit $x \in]0;1[$ fixé.
(a) Montrer que la fonction $\varphi_x \ : \ t \mapsto \frac{x-t}{1-t}$ est décroissante sur l'intervalle $[0;x]$.
(b) Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right).$$
(c) On **admet** que
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$
Montrer que
$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \to +\infty.$$
(d) En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$

(4) Soit x un réel de $]0;1[$.
Montrer que la série $\sum_{k\geq 0}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et que
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1-p.$$
On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

(5) Déterminer, en fonction de p, l'espérance et la variance de Y_n.

On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit
$$\begin{cases} X_0 &= 0 \\ X_{n+1} &= X_n + Y_n \end{cases}$$

(6) Simulation sous `SciLab`

(a) Écrire une fonction d'en-tête `function y=Y(p)` qui renvoie une simulation de la loi de Rademacher de paramètre p.

(b) Écrire alors une fonction d'en-tête `function y=marche(n,p)` qui renvoie une simulation de X_n.

(7) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

(a) Reconnaître la loi de Z_n. On précisera son (ou ses) paramètre(s).

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k$?

(c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad X_n = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$

(8) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_{2n+1} = 0, \qquad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

(9) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer que $0 < p(1-p) < \frac{1}{4}$.

(b) À l'aide de la Partie I, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ converge et préciser sa somme.

(10) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \dfrac{1}{2}$.

(a) Montrer que $p_{2n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, $n \to +\infty$.

(b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} p_{2n}$ diverge.

(11) On **admet** le théorème suivant (nommé *Lemme de Borel-Cantelli*):
Soit (A_n) une suite d'évènements. Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.
Que permet alors de conclure le résultat montré à la Question (9b)?

(12) (*) Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus. On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge.
On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1} \subset B_n$. On pose $B = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes:

$$(*) \quad \omega \in B \iff (**) \quad \omega \in A_k \text{ pour une infinité de valeurs de } k$$

(c) Montrer que $P(B_n) \leq \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$.

(d) Justifier que $P(B) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. Conclure que $P(B) = 0$.