ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°5 - Sujet B

Solution

Exercice 1

Cet exercice est extrait d'un vieux sujet, d'une banque d'épreuves obsolète, posé en **2002**.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2 et x et y deux réels de l'intervalle $]0;1[$. On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,y)$ et on définit ensuite la variable aléatoire Z en posant

$$Z = 2n - X - Y.$$

(1) On introduit aussi la variable aléatoire W définie par $W = XYZ$. C'est assez lourd mais on a peur de rien.

$$\begin{aligned}
E(W) &= E(XYZ) = E(XY(2n-X-Y) \\
&= E(2nXY - X^2Y - XY^2) \\
&= 2nE(XY) - E(X^2Y) - E(XY^2) \qquad \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= 2nE(X)E(Y) - E(X^2)E(Y) - E(X)E(Y^2)
\end{aligned}$$

car X et Y sont indépendantes mais aussi X^2 et Y (lemme des coalitions) et aussi X et Y^2 (toujours ce même lemme). On sait aussi, d'après le cours sur les lois usuelles, que

$$\begin{aligned}
E(X) &= nx \\
E(X^2) &= V(X) + E(X)^2 \\
&= nx(1-x) + n^2x^2 = nx(1+(n-1)x) \\
\text{et} & \\
E(Y) &= ny \\
E(Y^2) &= ny(1+(n-1)y)
\end{aligned}$$

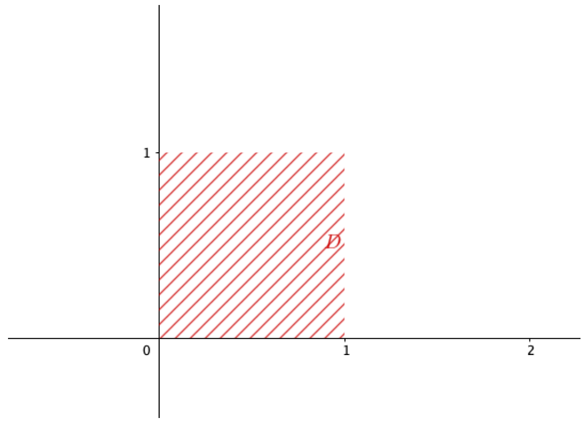
Il suit qu'on a bien

$$\begin{aligned}
E(W) &= 2nE(X)E(Y) - E(X^2)E(Y) - E(X)E(Y^2) \\
&= 2n(nx)(ny) - nx(1+(n-1)x)ny - nxny(1+(n-1)y) \\
&= n^2(2nxy - xy(1+(n-1)x) - xy(1+(n-1)y)) \\
&= n^2xy(2n-1-(n-1)x-1-(n-1)y) \\
&= n^2xy(n-1)(2-x-y).
\end{aligned}$$

(2) On pose $D =]0;1[\times]0;1[$. On admet que D est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et on définit, pour $(x,y) \in D$, la fonction f par

$$f(x,y) = xy(2-x-y).$$

(a) Le domaine D est l'intérieur (sans les *bords*) du carré ci-dessous.



(b) La fonction f est polynomiale, elle est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et *a fortiori* sur D.

(c) La fonction f ne peut présenter un extremum qu'en un *point critique*. On part donc à leur recherche. Pour cela on commence par former le *gradient* de f.

$$\partial_1 f(x,y) = y(2-x-y) - xy = 2y - 2yx - y^2, \qquad \partial_2 f(x,y) = 2x - 2xy - x^2.$$

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \nabla f(x,y) = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y - 2yx - y^2 &=& 0 \\ 2x - 2xy - x^2 &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y - y^2 &=& 2xy \\ 2x - x^2 &=& 2xy \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y - y^2 &=& 2x - x^2 \\ 2x - x^2 &=& 2xy \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Or,

$$2x - x^2 = 2y - y^2 \iff x = y$$

car $\varphi : x \mapsto 2x - x^2$ est bijective sur $]0;1[$ (en effet, elle est polynomiale donc continue et strictement croissante car $\varphi'(x) = 2 - 2x = 2(1-x) > 0$; le théorème de bijection s'applique). Il suit que

$$\begin{aligned}
(x,y) \text{ point critique de } f &\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2y - y^2 &=& 2x - x^2 \\ 2x - x^2 &=& 2xy \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ 2x - x^2 &=& 2x^2 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& y \\ 3x^2 - 2x &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff x = y = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Ainsi, f n'est susceptible de présenter un extremum qu'en $A = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(d) On forme la matrice hessienne de f en A. Pour cela, on calcule les dérivées partielles d'ordre 2.

$$\begin{aligned}
\partial^2_{1,1} f(x,y) &= -2y \\
\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \partial^2_{2,1} f(x,y) \qquad \text{(par Schwarz)} \\
&= 2-2x-2y \\
\partial^2_{2,2} f(x,y) &= -2x
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$H(A) = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}M.$$

Les valeurs propres de $H(A)$ sont de même signe que celles de M. Or,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M-\lambda I \text{ non inversible} \\
&\iff \det(M-\lambda I) = 0 \\
&\iff (-2-\lambda)^2 - 1 = 0 \\
&\iff \lambda = -1 \text{ ou } \lambda = -3
\end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de $H(A)$ sont donc strictement négatives, ce qui est suffisant pour affirmer que f présente un maximum local en A. Ce maximum vaut

$$f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} \simeq 0.296$$

(e) Les *lignes de niveaux* de f poussent à penser que f présente un maximum en (x_0,y_0) qui est supérieur ou égal à 0.29 et strictement inférieur à 0.3 (au vu du *pas* de 0.1) et on peut aussi *localiser* (x_0,y_0); il semble que

$$0.55 \leq x_0 \leq 0.75, \qquad 0.55 \leq y_0 \leq 0.75$$

Tout cela est tout à fait cohérent avec l'étude précédente.

(f) Il suffit d'ajouter

```
fplot3d(x,y,f)
```

ou bien

```
z=evalf(x,y,f)
plot3d(x,y,z)
```

(g) Le calcul, relativement fastidieux, donne, en notant

$$g(x,y) = \frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right) - y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2,$$

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= \frac{1}{4}\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)\left(y-\frac{8}{3}\right) - y\left(x^2+1+\frac{1}{4}y^2+xy-2x-y\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(y^3-\frac{12}{3}y^2+\frac{36}{9}y-\frac{32}{27}\right) - yx^2 - y + \frac{1}{4}y^3 - xy^2 + 2xy + y^2 \\
&= -yx^2 - xy^2 + 2xy - \frac{8}{27} \\
&= f(x,y) - f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}$$

(h) Comme $(x,y)\in D$, on a $y-8/3<0$. Les carrés étant positifs, on a donc, pour tout $(x,y)\in D$,

$$f(x,y)-f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)\leq 0$$

ou encore, pour tout $(x,y)\in D$,

$$f(x,y)\leq f\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

et donc le minimum local est finalement global.

Exercice 2

Cet exercice provient du sujet **EDHEC 1999**.

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$M\,(a)=\begin{pmatrix}1 & a-2 & a & 1\\ a & -1 & 1 & a\\ 0 & 0 & -a & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

(1) Commençons par expliciter

$$M(0)=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Hélas ce n'est **pas** une matrice triangulaire. Mais on n'est pas loin! Sachant que les opérations sur les lignes préservent l'inversibilité,

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M(0) &\iff M(0)-\lambda I \text{ non inversible}\\
&\iff \begin{pmatrix}1-\lambda & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\\ 0 & 0 & -1 & -\lambda\end{pmatrix} \text{ non inversible}\\
&\iff \begin{pmatrix}1-\lambda & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda & 1\end{pmatrix} \text{ non inversible}\\
&\iff \begin{pmatrix}1-\lambda & -2 & 0 & 1\\ 0 & -1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 0 & 1+\lambda^2\end{pmatrix} \text{ non inversible}\\
&\iff \lambda=1 \text{ ou } \lambda=-1
\end{aligned}$$

car la dernière matrice est triangulaire et sa non inversibilité est caractérisée par la présence de coefficients nuls sur la diagonale (et que λ^2+1 ne s'annule jamais). On a bien

$$\mathrm{Sp}(M(0))=\{-1;1\}.$$

Pour les sous-espaces propres, on résout. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} X \in E_1 &\iff M(0)X = X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} -2y+t &=& 0 \\ -2y+z &=& 0 \\ -z+t &=& 0 \\ -z-t &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff y = z = t = 0 \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

On fait de même pour l'autre sous-espace propre.

$$\begin{aligned} X \in E_{-1} &\iff M(0)X = -X \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-2y+t &=& 0 \\ z &=& 0 \\ z+t &=& 0 \\ -z+t &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& y \\ z &=& 0 \\ t &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on peut écrire

$$E_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

En particulier, comme $\dim(E_1) + \dim(E_{-1}) = 1 + 1 = 2 \neq 4$, $M(0)$ n'est pas diagonalisable.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

(2) On raisonne de la même manière que précédemment

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } M(a) &\iff M(a)-\lambda I \text{ non inversible}\\
&\iff \begin{pmatrix} 1-\lambda & a-2 & a & 1\\ a & -1-\lambda & 1 & a\\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1\\ 0 & 0 & -1 & -\lambda \end{pmatrix} \text{ non inversible}\\
&\iff \begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a\\ 1-\lambda & a-2 & a & 1\\ 0 & 0 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & -a-\lambda & 1 \end{pmatrix} \text{ non inversible}\\
&\iff \begin{pmatrix} a & -1-\lambda & 1 & a\\ 0 & (a-1)^2-\lambda^2 & a^2-1+\lambda & a\lambda\\ 0 & 0 & -1 & -\lambda\\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2+a\lambda+1 \end{pmatrix} \text{ non inversible}\\
&\iff (a-1)^2-\lambda^2=0 \text{ ou } \lambda^2+a\lambda+1=0
\end{aligned}$$

On a bien montré que les valeurs propres de $M\,(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :

$$\lambda^2=(a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2+a\lambda+1=0.$$

(3) (a) $M(a)$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda=0$ est valeur propre de $M(a)$ donc si et seulement si

$$(a-1)^2=0 \iff a=1.$$

(b) Pour $a=1$, la seule solution des équations précédentes est $\lambda=0$, donc $M(1)$ n'admet qu'une seule valeur propre. La matrice $M(1)$ n'étant pas identiquement nulle, elle ne peut avoir un sous-espace propre associé de dimension 4 et n'est donc pas diagonalisable.

(4) On suppose dans cette question que $a>2$.

(a) L'équation $\lambda^2=(a-1)^2$ donne déjà deux solutions (donc deux premières valeurs propres) distinctes, qui sont $\lambda_1=a-1$ et $\lambda_2=1-a$ (il s'agit bien de solutions distinctes car $a\neq 1$). Le polynôme

$$X^2+aX+1$$

a pour discriminant $\Delta=a^2-4=(a-2)(a+2)>0$ car $a>2$. Donc il admet deux racines distinctes, qui sont

$$\lambda_3=\frac{-a+\sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}, \quad \text{et} \quad \lambda_4=\frac{-a-\sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}.$$

Les réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ sont bien deux à deux distincts, car λ_1 et λ_2 ne sont pas racines de X^2-aX+1. En effet,

$$\begin{aligned}
\lambda_1^2-a\lambda_1+1 &= a^2-2a+1+a^2-a+1=2a^2-3a+2\\
&> 0 \quad \text{pour tout } a\in\mathbb{R} \text{ car } (-3)^2-4\times2\times2=-7<0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2^2+a\lambda_2+1 &= a^2-2a+1+a-a^2+1=2-a\\
&< 0.
\end{aligned}$$

(b) $M(a)$ possède quatre valeurs propres distinctes; le cours permet d'affirmer qu'elle est diagonalisable.

Exercice 3

Cet exercice est inspiré (et augmenté) d'un sujet d'oral (avec préparation) de HEC.

Pour n entier tel que $n \geq 2$, on introduit l'intégrale

$$J_n = \int_0^1 (-\ln(x))^{n-1} \mathrm{d}x$$

(1) L'intégrale $J_2 = \displaystyle\int_0^1 (-\ln(t))\mathrm{d}t$ est impropre en 0. On a déjà rencontré cette intégrale. Il faut la calculer avec une intégration par parties. En effet, soit $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 (-\ln(t))\mathrm{d}t &= [-t\ln(t)]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \mathrm{d}t \\ &= \varepsilon\ln(\varepsilon) + (1-\varepsilon) \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{(par croissance comparée)} \end{aligned}$$

où on a posé

$$\begin{cases} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= -\ln(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) &= t \\ v'(t) &= -1/t \end{cases}$$

qui sont deux fonctions toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; 1]$ rendant l'intégration par parties licite. Ainsi, J_2 converge et vaut 1.

(2) On sait déjà que J_2 converge. Supposons donc, pour un certain entier $n \geq 2$ que J_n converge. Soit alors $\varepsilon > 0$. Posons

$$\begin{cases} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= (-\ln(t))^n \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) &= t \\ v'(t) &= n(-\ln(t))^{n-1}(-1/t) \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon; 1]$. Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 (-\ln(t))^n\mathrm{d}t &= [t(-\ln(t))^n]_\varepsilon^1 + n\int_\varepsilon^1 (-\ln(t))^{n-1}\mathrm{d}t \\ &= -\varepsilon(-\ln(\varepsilon))^n + n\int_\varepsilon^1 (-\ln(t))^{n-1}\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\int_\varepsilon^1 (-\ln(t))^{n-1}\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} J_n$$

et, par croissance comparée

$$\varepsilon(-\ln(\varepsilon))^n \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, la limite, lorsque $\varepsilon \to 0$, de $\displaystyle\int_\varepsilon^1 (-\ln(t))^n\mathrm{d}t$ existe, c'est à dire que J_{n+1} converge. On a même

$$J_{n+1} = nJ_n.$$

(3) On en déduit, par une récurrence immédiate, que $J_n = (n-1)!$. En effet, c'est vrai pour $J_2 = 1 = (2-1)!$. Et si c'est vrai pour un certain $n \geq 2$, comme $J_{n+1} = nJ_n$, on a $J_{n+1} = n(n-1)! = n!$ ce qui est bien le formule au rang $n+1$ et termine cette récurrence triviale.

On définit alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, sur $\mathbb{R}$, la fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{(-\ln(x))^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{si } x \in]0;1[\\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(4) Commençons par voir que si $n = 1$, f_1 est en fait la densité de la loi uniforme sur $[0;1]$, qu'on sait déjà être une densité. Pour $n \geq 2$, il suffit de vérifier les trois conditions du cours pour que ce soit le cas.

- Positivité.
  On sait que $\ln(x) \leq 0$ si $x \in]0;1]$, donc $(-\ln(x)) \geq 0$ et il en est de même pour f_n sur $]0;1]$. Ailleurs, la fonction est nulle.

- Continuité (sauf peut-être....).
  Sur $]0;1]$, f_n est multiple d'une puissance de ln qu'on sait être continue. Sur $]-\infty;0[$ et sur $]1,+\infty[$, f_n est constante donc continue. En 0 la fonction n'est pas continue (sa limite en 0^+ vaut $+\infty$) mais ce n'est pas un problème pour appliquer notre propriété.

- Convergence de l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}$ vers 1.
  Comme f_n est nulle en dehors de $]0;1]$, on étudie la convergence de $\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
  On reconnait un multiple de l'intégrale J_n, qui converge et vaut $(n-1)!$. Il est donc clair que notre intégrale converge et vaut 1. Le monde est bien fait.

On note alors X_n une variable aléatoire de densité f_n et, dans toute la suite, F_n la fonction de répartition de F_n.

(5) Comme précédemment mentionné, $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Le cours permet alors d'affirmer que $E(X_1) = 1/2$, $V(X_1) = 1/12$ et

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Par ailleurs, d'après König-Huyguens par exemple,

$$E(X_1^2) = V(X_1) + E(X_1)^2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}.$$

(6) (a) Pour montrer que X_n admet une espérance et variance, on montre en un coup que X_n admet un moment d'ordre k pour $k = 1$ et $k = 2$ (en fait c'est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}^*$). En effet, d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned} X_n \text{ admet un moment d'ordre } k &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} t^k f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^1 t^k f_n(t)\mathrm{d}t \text{ converge} \\ &\iff \int_0^1 t^k(-\ln(t))^{n-1}\mathrm{d}t \text{ converge} \end{aligned}$$

Or, la fonction $t \mapsto t^k(-\ln(t))^{n-1}$ se prolonge par continuité en 0 (par un argument de croissance comparée). Ainsi l'intégrale est *faussement* impropre et donc bien convergente et l'espérance existe.

(b) On procède comme précédemment. Soient $\varepsilon > 0$ et $k \in \{1;2\}$. On pose

$$\begin{cases} u'(t) &= t^k \\ v(t) &= f_{n+1}(t) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u(t) &= \frac{t^{k+1}}{k+1} \\ v'(t) &= f_n(t)(-1/t) \end{cases}$$

Ces deux fonctions sont encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon;1]$. Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^1 t^k f_n(t)\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}f_{n+1}(t)\right]_\varepsilon^1 + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k f_n(t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1}f_{n+1}(\varepsilon) + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k f_n(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, comme X_n et X_{n+1} admettent un moment d'ordre k par la question précédente, on a

$$\int_\varepsilon^1 t^k f_n(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} E(X_n^k), \quad \text{et} \quad \int_\varepsilon^1 t^k f_{n+1}(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} E(X_{n+1}^k).$$

Toujours par croissance comparée,

$$\frac{\varepsilon^{k+1}}{k+1}f_{n+1}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

ce qui donne

$$E(X_{n+1}^k) = \frac{1}{k+1}E(X_n^k)$$

et en particulier

$$E(X_{n+1}) = \frac{1}{2}E(X_n).$$

Posant $u_n = E(X_n)$ on a donc $u_{n+1} = (1/2)u_n$. On reconnait une suite géométrique de raison $(1/2)$ et de premier terme $u_1 = 1/2$.

$$E(X_n) = u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(c) D'après ce qui précède, on a aussi

$$E(X_{n+1}^2) = \frac{1}{3}E(X_n^2).$$

Exactement comme précédemment, on trouve

$$E(X_n^2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Par König-Huyguens, on a donc

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

comme attendu.

(7) Soient $n \geq 2$ et $x \in]0;1[$. Par définition,

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = \int_{-\infty}^x f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

On refait pour la 36e fois la même intégration par parties, entre ε et x. On pose encore

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& 1 \\ v(t) &=& f_n(t)\end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& t \\ v'(t) &=& f_{n-1}(t)(-1/t)\end{array}\right.$$

Ces deux fonctions sont encore de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon;x]$. Par intégration par parties, on a donc

$$\begin{aligned}\int_\varepsilon^x tf_n(t)\mathrm{d}t &= [tf_n(t)]_\varepsilon^x + \int_\varepsilon^x f_{n-1}(t)\mathrm{d}t \\ &= xf_n(x) - \varepsilon f_n(\varepsilon) + \int_\varepsilon^x tf_{n-1}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Or, une fois de plus, par croissance comparée

$$\varepsilon f_n(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

et

$$\int_\varepsilon^x t f_{n-1}(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} F_{n-1}(x), \qquad \int_\varepsilon^x t f_n(t)\mathrm{d}t \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} F_n(x)$$

On a donc bien

$$F_n(x) = \frac{x(-\ln(x))^{n-1}}{(n-1)!} + F_{n-1}(x).$$

(8) Ainsi, par télescopage, pour $x \in]0;1]$,

$$F_n(x) - F_1(x) = \sum_{k=2}^n (F_k(x) - F_{k-1}(x)) = \sum_{k=2}^n \frac{x(-\ln(x))^{k-1}}{(k-1)!}$$

ou encore, $F_1(x) = x$ si $x \in]0;1]$,

$$F_n(x) = x + x\sum_{k=2}^n \frac{(-\ln(x))^{k-1}}{(k-1)!} = x\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-\ln(x))^j}{j!}.$$

(9) On reconnait dans la somme précédente une série exponentielle de paramètre $-\ln(x)$. Donc, pour $x \in]0;1]$, on a

$$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} xe^{-\ln(x)} = 1.$$

Comme, clairement $F_n(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F_n(x) = 1$ si $x > 1$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une variable certaine égale à 0. On peut donc conclure que

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0.$$

Problème

Ce problème est proposé en sujet zéro par **ECRICOME** pour l'évolution du concours et de la série ECG à partir de 2023. Il a été remanié notamment pour les questions `SciLab` (à la place de Python). La démonstration du lemme de Borel-Cantelli en fin de problème apparait en revanche sous cette forme dans le sujet **ESSEC II 2021**.
La formule de Taylor à l'ordre n avec reste intégral (Question (2a)) apparaissait déjà dans plusieurs sujets, notamment **EDHEC 1998**.

Partie I : Un développement en série

Soit f la fonction définie sur $[0;1[$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

(1) La fonction $u \mapsto \sqrt{u}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $x \in [0;1[$, $1-x > 0$. Par composition, f est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$.

(2) (a) Soit $x \in]0;1[$. C'est parti.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$. On a bien

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{0} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(1)}(t)\mathrm{d}t &= f(0) + \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t \\ &= f(0) + [f(t)]_0^x = f(0) + f(x) - f(0) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

et la relation est vérifiée pour $n = 0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$\sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t = f(x).$$

On commence par traiter l'intégrale du membre de gauche au rang $n+1$. Comme suggéré, on va faire une petite intégration par parties. On pose

$$\left\{\begin{array}{rcl} u'(t) &=& \frac{(x-t)^n}{n!} \\ v(t) &=& f^{(n+1)}(t)\end{array}\right. \rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcl} u(t) &=& -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \\ v'(t) &=& f^{(n+2)}(t)\end{array}\right.$$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;1[$, les fonctions u et v sont notamment de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;x]$ rendant cette intégration par parties licite. Ceci donne

$$\begin{aligned}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t &= \left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^x + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Mais alors

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\mathrm{d}t \qquad (\text{ par HR}) \\ &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} f^{(k)}(0)\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

ce qui est bien la formule au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(b) Il s'agit de dériver des fonctions racines...

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$,

$$f^{(0)}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(2\times 0)!}{2^{2\times 0}0!}(1-x)^{-0-\frac{1}{2}},$$

et la formule est vraie pour $n = 0$.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}(1-x)^{-n-\frac{1}{2}}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \left(f^{(n)}\right)'(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}}\right)' \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(-\left(-n-\frac{1}{2}\right)\right)\left((1-x)^{-n-\frac{1}{2}-1}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{2n+1}{2}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\left(\frac{(2n+2)(2n+1)}{2\times 2(n+1)}\right)\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!}\left((1-x)^{-(n+1)-\frac{1}{2}}\right),
\end{aligned}$$

ce qu'on voulait pour terminer cette récurrence.

(c) Dans le but d'utiliser la Question (2a), on commence par écrire que

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!k!} = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

et

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} &= \frac{(2(n+1))!}{2^{2(n+1)}(n+1)!n!}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\frac{(x-t)^n}{(1-t)^n} \\
&= \frac{(n+1)(2n+2)!}{2^{2n+2}(n+1)!(n+1)!}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{(x-t)}{(1-t)}\right)^n \\
&= \frac{(n+1)}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\left((1-t)^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{(x-t)}{(1-t)}\right)^n
\end{aligned}$$

et la formule obtenue à la Question (2a) donne immédiatement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k + \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

(3) Soit $x \in]0;1[$ fixé.

(a) La fonction φ_x est dérivable sur $[0;x]$ comme quotient de polynomes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a

$$\varphi_x'(t) = \frac{-(1-t)+x-t}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(1-t)^2} < 0$$

car $x < 1$ et φ_x est bien décroissante sur l'intervalle.

(b) Observant que la quantité sous l'intégrale est positive sur $[0;x]$, la positivité de l'intégrale garantit bien l'inégalité de gauche de l'encadrement demandé.
La fonction φ_x étant décroissante sur $[0;x]$, et la fonction $u \mapsto u^n$ étant elle croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a, pour tout $t \in [0;x]$,

$$\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n = \varphi_x(t)^n \leq \varphi(0)^n = x^n.$$

Il suit, par positivité de l'intégrale, que

$$\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq x^n \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t = x^n\left[2(1-t)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^x$$

Tout ceci donne bien

$$0 \leq \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \leq 2x^n\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right).$$

(c) On **admet** que
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}, \qquad n \to +\infty.$$
Par définition des coefficients binomiaux
$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n+2)}(2n+2)^{(2n+2)}e^{-2n-2}}{\left(\sqrt{2\pi(n+1)}(n+1)^{(n+1)}e^{-n-1}\right)^2} = \frac{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)}.$$
Mais alors,
$$\frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \sim \frac{(n+1)}{2^{2n+2}}\frac{2^{2n+2}\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}(n+1)} = \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\pi}} \sim \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}, \qquad n \to +\infty.$$
(d) La question précédente permet d'affirmer que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} = 0.$$
Celle encore avant donne, par le théorème des gendarmes, car $x^n \to 0$ (vu que $0 < x < 1$), que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$
Par produit, on peut donc conclure que
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1} \int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t = 0.$$
(4) Soit x un réel de $]0;1[$. D'après la Question (2c) et la question précédente,
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k &= f(x) - \frac{n+1}{2^{2n+2}}\binom{2n+2}{n+1}\int_0^x (1-t)^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x-t}{1-t}\right)^n \mathrm{d}t \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x).\end{aligned}$$
Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k$ converge et sa somme vérifie
$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k}{k}\left(\frac{x}{4}\right)^k.$$

Partie II : Une marche aléatoire

Soit p un réel fixé de $]0;1[$.
On considère une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi, vérifiant
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad P(Y_n = 1) = p, \qquad P(Y_n = -1) = 1-p.$$
On dit qu'une telle variable suit la loi de *Rademacher* de paramètre p.

(5) Sans la moindre difficulté
$$E(Y_n) = (-1)(1-p) + p = 2p-1, \quad E(Y_n^2) = (-1)^2(1-p) + p = 1, \quad V(Y_n) = 1 - (2p-1)^2 = 4p(1-p).$$
On introduit ensuite une suite (X_n) de variables aléatoires définie comme suit
$$\begin{cases} X_0 &= 0 \\ X_{n+1} &= X_n + Y_n \end{cases}$$
(6) Simulation sous `SciLab`

(a) On s'inspire de la façon de simuler une bernoulli à partir d'une loi uniforme.

```
function y=Y(p)
    if rand() <= p then
        y=1
    else
        y=0
    end
endfunction
```

(b) Tout ceci s'écrit sans difficulté en suivant la définition avec une petite boucle `for` en utilisant la fonction `Y` ci-dessus.

```
function y=marche(n,p)
    y=0
    for k=1:n
        y=y+Y(p)
    end
endfunction
```

(7) On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = \dfrac{Y_n + 1}{2}$.

(a) Si $Y_n = 1$ alors $Z_n = 1$, si $Y_n = -1$ alors $Z_n = 0$. On reconnait une loi de Bernoulli de paramètre p.

(b) Les variables Y_k sont mutuellement indépendantes. Par le lemme des coalitions il en est de même pour les variables Z_k. Et le cours nous dit que la somme de Bernoulli indépendantes est une binomiale. On peut donc affirmer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p).$$

(c) Observant que

$$X_{k+1} - X_n = Y_k = 2Z_k - 1,$$

un télescopage donne

$$X_n = X_n - X_0 = \sum_{k=0}^{n-1}(X_{k+1} - X_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(2Z_k - 1) = 2\sum_{k=0}^{n-1} Z_k - n.$$

(8) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(X_n = 0)$.
Ainsi, p_n est donc la probabilité d'être de retour, à l'instant n, au point de départ 0.
On a alors

$$p_{2n+1} = P(X_{2n+1} = 0) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n+1} Z_k = 2n+1\right) = 0$$

car les variables Z_k prennent leur valeurs dans $\{0;1\}$ et donc nécessairement $2\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} Z_k$ prend une valeur paire.
En revanche,

$$p_{2n} = P(X_{2n=0}) = P\left(2\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = 2n\right) = P\left(\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k = n\right) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

car on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1} Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(2n,p)$.

(9) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p \neq \dfrac{1}{2}$.

(a) C'est une question classique. On étudie la fonction $\psi : x \mapsto x(1-x)$ sur $]0;1[$. Cette fonction est polynomiale donc dérivable. Sa dérivée vaut $\psi'(x) = 1-2x$ et ψ est donc maximale en $x = 1/2$ et le maximum vaut $\psi(1/2) = 1/4$ et il n'est atteint que pour $p = 1/2$. Ainsi, on a bien, pour tout $p \in]0;1[$ que

$$p(1-p) < \frac{1}{4}.$$

(b) En particulier, la question précédente permet d'affirmer que $4p(1-p) < 1$. On peut donc utiliser la formule de la Question (4) avec $x = 4p(1-p)$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} (p(1-p))^n = f(4p(1-p)).$$

On a donc bien montré que la série $\sum_{n \geq 0} p_{2n}$ était convergente et que sa somme valait

$$f(4p(1-p)) = \frac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}.$$

(10) Dans cette question, et dans cette question uniquement, on considère le cas particulier où $p = \dfrac{1}{2}$.

(a) En reprenant la Question (3c), avec $2n$ au lieu de $2(n+1)$, on a

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Ceci donne tout de suite

$$p_{2n} = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

(b) On sait que la série $\sum_{n \geq 1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (par critère de Riemann). Ainsi, par critère d'équivalence (pour les séries à termes positifs - qu'on peut appliquer car p_{2n} est une quantité positive : c'est une probabilité), on peut conclure que la série $\sum_{n \geq 0} p_{2n}$ diverge.

(11) On **admet** le théorème suivant (nommé *Lemme de Borel-Cantelli*):
Soit (A_n) une suite d'évènements. Si la série $\sum P(A_n)$ converge, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle.

On applique ce lemme à la suite d'évènement $A_n = [X_n = 0]$, dans le cas de $p \neq 1/2$. On sait que $p_{2n+1} = 0$ et que la série $\sum p_{2n}$ converge (on a noté $p_n = P(A_n)$ donc la série $\sum P(A_n)$ converge et la probabilité qu'une infinité des A_n se réalisent simultanément est nulle, c'est à dire que la probabilité de revenir à l'état initial 0 pour X_n une infinité de fois est nulle.

(12) (*) Le but de cette question est de démontrer le lemme de Borel-Cantelli admis-ci dessus. On considère donc une suite d'évènements (A_n) d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge.

On pose ensuite, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$.

(a) On observe que

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k = A_n \cup \left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty} A_k\right) = A_n \cup B_{n+1}$$

donc on a bien $B_{n+1} \subset B_n$, c'est à dire que la suite d'évènements (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion. On pose $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$.

(b) Soit $\omega \in \Omega$. On montre l'équivalence souhaitée par double implication:

- $\Longrightarrow$. Si $\omega \in B$, alors, pour tout $n \geq 1$, on a $\omega \in B_n$ (c'est la définition de l'intersection). Et par définition de B_n et de la réunion, il existe donc $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$. Donc, on peut trouver un k arbitrairement grand tel que $\omega \in A_k$, c'est à dire que ω est bien dans une infinité de A_k.

- $\Longleftarrow$. Supposons que ω soit dans une infinité de A_k. Si $\omega \notin B$, alors alors il existe un $n \geq 1$, tel que $\omega \notin B_n$. Mais alors, pour tout $k \geq k$, on a $\omega \notin A_k$. Ce qui veut dire que ω peut au mieux appartenir à A_1, ..., A_{n-1}, c'est à dire à un nombre fini d'évènements A_k, ce qui est une contraction.

(c) On sait que si C et D sont deux évènements, alors $P(C \cup D) = P(C) + P(D) - P(C \cap D) \leq P(C) + P(D)$. Une récurrence immédiate permet de voir que la probabilité d'une somme d'évènements reste inférieure ou égale à la somme des probabilités de ces évènements et on a

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) \leq \sum_{k=n}^{N} P(A_k)$$

mais la suite d'évènements $\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right)_N$ est croissante au sens de l'inclusion et, par limite monotone

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n}^{N} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = P(B_n).$$

On a donc bien, en passant à la limite $(N \to +\infty)$ dans l'inégalité ci-dessus que

$$P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k).$$

(d) Comme la série de terme général $P(A_n)$ est supposée convergente, son reste tend vers 0, ou encore

$$\sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, par limite monotone qu'on peut appliquer car la suite (B_n) est décroissante au sens de l'inclusion,

$$P(B) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$$

par théorème des gendarmes. Comme on a montré qu'appartenir à B était équivalent à être dans une infinité de A_k, on a bien montré que la probabilité d'être dans une infinité de A_k était nulle

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k\right) = 0.$$