ECE 2 - Année 2021-2022
ENC Bessières
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir surveillé n°6 - Sujet A

Samedi 26 Mars
Durée : 4 heures

Exercice 1

À tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + bX + a$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on associe l'unique matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ci-dessous, appelée *matrice compagnon* du polynôme P.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}$$

On donne alors le résultat suivant, noté $(\star)$ qui sera utilisé et démontré dans cet exercice.

$(\star)$ *Le polynôme P est un polynôme annulateur de sa matrice compagnon C.*

Partie 1 - Étude d'un exemple

On considère **dans cette partie seulement** que le polynôme P est donné par $P(X) = X^4 + X$.

(1) Identifier et expliciter la matrice compagnon de P, notée A.
(2) Montrer que A n'est pas inversible et en déduire, sans calcul, une valeur propre de A.
(3) Calculer A^4. Vérifier alors la validité du résultat $(\star)$.
(4) En déduire les valeurs propres de A.
(5) La matrice A est-elle diagonalisable?

Partie 2 - Utilisation du résultat $(\star)$

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application φ définie par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & x-2t \\ y+t & z+2t \end{pmatrix} \end{array}$$

(6) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(7) Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(8) On note P_B le polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ dont B est la matrice compagnon.

(a) Identifier le polynôme P_B puis vérifier que $P_B(X) = (X^2 - 2X)(X^2 - 1)$.
(b) En déduire, à l'aide du résultat ($\star$), que les valeurs propres possibles de B sont $\{-1, 0, 1, 2\}$.
(c) On note

$$M_1 = E_{2,2} - E_{1,2}, \quad M_2 = 2E_{1,2} - 3E_{2,1} + E_{2,2},$$

$$M_3 = E_{2,2} - 2E_{1,2} - E_{2,1} \quad \text{et} \quad M_4 = 2(E_{1,1} - E_{2,1}) + M_1.$$

Calculer les images par φ des quatre matrices précédentes.

(9) La matrice B est-elle diagonalisable?

Partie 3 - Preuve du résultat ($\star$)

On considère donc un polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + b^X + a$ auquel on associe la matrice compagnon C définie ci-avant.

On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est C.

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$. On note $f^0 = \mathrm{Id}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$. Enfin, on pose $g = P(f)$, c'est à dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$,

$$g(u) = f^4(u) + df^3(u) + cf^2(u) + bf(u) + au.$$

(10) Montrer que

$$f(e_1) = e_2, \quad f^2(e_1) = e_3, \quad f^3(e_1) = e_4$$

et que

$$f^4(e_1) = -(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4).$$

(11) (a) Montrer que $g(e_1) = 0$.
(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $g \circ f^k = f^k \circ g$.
(c) En déduire que, pour tout $k \in [\![1; 4]\!]$, $g(e_k) = 0$.
(d) Conclure.

Exercice 2

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

(1) Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.
(2) Établir que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \qquad \ln x + \frac{1}{x} > 0.$$

(3) En déduire que

$$\forall x \in]0; +\infty[, \qquad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

(4) En déduire le sens de variation de f.
(5) Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
(6) Quelle est la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f?
(7) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.
(9) Établir, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n$.
(10) Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?
(11) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = 1/u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. On note S sa limite.
(12) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| S - \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(13) (a) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `function V=Suite_V (n)`, prenant en paramètre un entier n et renvoyant la valeur de v_n.
(b) À l'aide de la Question 12, compléter la fonction `SciLab` ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

```
function App = Approx_S()
    n = 0
    v = Suite_V(0)
    App = v
    e = 1/(exp(1)-1)
    while e ..........
        n = n+1
        v = Suite_V(n)
        App = ..........
        e = ..........
endfunction
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F\left(x\right) = \int_1^x f\left(t\right) dt.$$

(14) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, exprimer $F'\left(x\right)$ à l'aide de $f\left(x\right)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G\left(x,y\right) = F\left(x\right) + F\left(y\right) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(15) Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$ à l'aide de $f\left(x\right)$, $f\left(y\right)$ et $e^{(x+y)/2}$.

(16) (a) Montrer que f est bijective.
(b) Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$

(17) Montrer que l'équation $x + \ln x = e$ d'inconnue $x \in]0;+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$.

(18) En déduire que G admet comme unique point critique le point (α, α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α, α) s'écrit :

$$H = \nabla^2(G)(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} & -\dfrac{e^\alpha}{2} \\ -\dfrac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha) I_2 - \frac{e^\alpha}{2} M$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(19) (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que

$$HX = \left(f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2} \lambda \right) X$$

et en déduire que

$$\mathrm{Sp}(H) = \{ f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha \}.$$

(b) Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$.

(c) En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.

Exercice 3

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Soit $p \in \,]0; 1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires discrètes

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

(1) (a) Reconnaître la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

(b) Déterminer la loi de Z. Expliciter son espérance et sa variance.

On note $Y = Z - X$.

(2) Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.

(3) (a) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

(b) Calculer la covariance du couple (X, Y).

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

(4) Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

On considère une variable aléatoire T telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in [0; +\infty[, \qquad P_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}.$$

(5) (a) Montrer : $\forall t \in [0; +\infty[, \quad \mathrm{P}(T > t) = \dfrac{p\, e^{-t}}{1 - q\, e^{-t}}$.

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
(c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

(6) On note $Z = UT$.

(a) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[\,, \qquad \mathrm{P}_{(U=n)}\left(Z > z\right) = e^{-z}.$$
(b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
(c) Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[\,, \qquad \mathrm{P}\left([U = n] \cap [Z > z]\right) = \mathrm{P}\left(U = n\right) \mathrm{P}\left(Z > z\right).$$

Partie III : Taux de panne d'une variable aléatoire à densité

Dans cette partie, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(7) Montrer que f est une densité de probabilité

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et admettant f comme densité.

(8) Déterminer la fonction de répartition F de X.

(9) Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0; 1[$. Expliciter $F^{-1}(y)$ pour $y \in [0; 1[$.

(10) On pose $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de Y.

(a) Déterminer alors $Y(\Omega)$.
(b) Expliciter $G(y)$ pour $y \in [0; 1[$ et en déduire la loi suivie par Y.
(c) À l'aide de la question 9, exprimer X en fonction de Y et compléter le script `SciLab` suivant, visant à simuler la variable aléatoire X.

```
function x=X()
    Y=rand()
    x=.....................
endfunction
```

(11) Pour tout réel $h > 0$, on introduit la fonction T_h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par
$$T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}(X \leq x + h).$$

(a) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que
$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$
(b) Pour tout réel $x > 0$, on note $T(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)}$. La fonction T s'appelle le *taux de panne associé à* X. Déterminer explicitement $T(x)$.
(c) Pour tout réel $x > 0$, vérifier que
$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x T(t)\mathrm{d}t\right).$$