Ecricome 2022, voie E

Une solution proposée par Frédéric Gaunard (ENC Bessières, Paris 17e - frederic@gaunard.com).

Merci aux collègues de l'APHEC (Tristant Catelin, Olivier Defrance, Nicolas Gauvrit, Romain Meurant...) pour leurs conseils avisés.

Exercice 1

Soit F l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$, où $a, b \in \mathbb{R}$.

Soit G l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = M$.

Partie I

(1) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. D'après la définition du texte

$$\begin{aligned} M \in F \quad &\iff \quad \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\iff \quad \exists a, b \in \mathbb{R}, \quad M = aI + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, on peut écrire

$$F = \text{Vect}\left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

et F est donc le sous-espace vectoriel engendré par les deux matrices ci-dessus: c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. La famille formée par les deux matrices susmentionnées en est génératrice et elle est clairement libre (deux vecteurs non colinéaires) : elle en forme une base. Ainsi, $\dim(F) = 2$.

(2) Il est immédiat de voir que I est un élément de G, car $I^2 = I$. Cependant, $2I \notin G$. En effet, $(2I)^2 = 4I \neq 2I$ et G n'est pas stable par multiplication par un réel et n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(3) Soit $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) En prenant $a = 2/3$ et $b = -1/3$ dans la définition de F, on a bien $A \in F$ et le calcul donne

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} = A$$

ce qui permet de dire que A est également élément de G et donc $A \in F \cap G$.

(b) Comme A vérifie la relation $A^2 = A$, on en déduit que le polynôme $X^2 - X$ annule A.

(c) Les valeurs propres de A sont alors incluses dans l'ensemble des racines du polynôme précédent, c'est à dire dans $\{0, 1\}$. On va donc vérifier pour chacune de ces deux valeurs si c'est bien une valeur propre de A ou non.

- Pour 0:

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A) &\iff AX = 0 \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 0 \\ -x + 2y - z &=& 0 \\ -x - y + 2z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z &=& 0 \\ 3y - 3z &=& 0 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& z \end{array}\right. \\
&\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, 0 est bien valeur propre et

$$E_0(A) = \operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(Le vecteur ci-dessus étant non nul et générateur de $E_0(A)$, il en forme une base.)

- Pour 1:

$$\begin{aligned}
X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(A - I) &\iff (A - I)X = 0 \\
&\iff \left\{ -x - y - z = 0 \right. \\
&\iff \left\{ x = -y - z \right. \\
&\iff X = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre et

$$E_1(A) = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

(Les deux vecteurs ci-dessus étant non colinéaires et générateurs de $E_1(A)$, il en forment une base.)

Au final

$$\operatorname{Sp}(A) = \{0; 1\}.$$

(d) 0 étant valeur propre de A, celle-ci n'est pas inversible. De plus; la somme des dimensions des deux sous-espaces propres de A étant égale à 3, celle-ci est bien diagonalisable (ce qu'on aurait pu prévoir vu qu'elle est symétrique).

Partie II

On considère dans cette partie une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in F$.

(4) (a) On va résoudre $M^2 = M$ pour caractériser l'appartenance à G en commençant par calculer M^2. On a

$$\begin{aligned} M \in G &\iff M^2 = M \\ &\iff \begin{pmatrix} a^2+2b^2 & b^2+2ab & b^2+2ab \\ b^2+2ab & a^2+2b^2 & b^2+2ab \\ b^2+2ab & b^2+2ab & a^2+2b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 &=& a \\ b^2+2ab &=& b \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 &=& a \\ b(b+2a-1) &=& 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

(b) La deuxième équation $b(b+2a-1) = 0$ donne $b = 0$ ou $b = 1-2a$. Si $b = 0$, on obtient en injectant dans la première équation que $a^2 = a$ ce qui donne $a = 0$ ou $a = 1$. La matrice M correspondant à $a = b = 0$ est la matrice nulle qui est donc élément de $F \cap G$. La matrice M pour $a = 1$ et $b = 0$ est la matrice I. Si maintenant $b = 1-2a$, on a $b^2 = 1-4a+4a^2$ et en injectant dans la première équation, on a

$$a^2 + 2(1-4a+4a^2) = a \iff 9a^2 - 9a + 2 = 0 \iff a = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad a = \frac{2}{3}.$$

Au final,

$$\begin{aligned} M \in F \cap G &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2+2b^2 &=& a \\ b(b+2a-1) &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& 0 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 1/3 \\ b &=& 1/3 \end{array} \right. \text{ ou } \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 2/3 \\ b &=& -1/3 \end{array} \right. \end{aligned}$$

En observant ensuite que

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \right) = I - A$$

et que le choix de $a = 2/3$ et $b = -1/3$ donne la matrice A, on a bien

$$F \cap G = \{0,\ I,\ A,\ I-A\}.$$

(5) On note $B = I - A$.

I et A étant deux matrices non colinéaires de F (on a bien justifié plus haut que $A \in F$ car A correspond à $a = 2/3$ et $b = -1/3$) qui est de dimension 2, il est clair que la famille (A, B) forme une base de F.

(6) (a) On pose $\alpha = \dfrac{4a-b}{3}$ et $\beta = \dfrac{a+2b}{3}$. On

$$\begin{aligned}\alpha A + \beta B &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\alpha+\beta & \beta-\alpha & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & 2\alpha+\beta & \beta-\alpha \\ \beta-\alpha & \beta-\alpha & 2\alpha+\beta \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Or,

$$2\alpha + \beta = 3a \quad \text{et} \quad \beta - \alpha = b - a$$

ce qui donc **ne marche pas**. Il y a donc une erreur dans le texte... En revanche, on a bien la relation

$$M = \alpha A + \beta B,$$

dont on peut se servir dans la suite, dès lors que

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2\alpha+\beta &=& 3a \\ \beta-\alpha &=& 3b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha &=& a-b \\ \beta &=& a+2b \end{array}\right.$$

(b) Comme $A^2 = A$ (car $A \in G$), avec la définition de B, on a bien

$$AB = A(I-A) = (I-A)A = BA = A - A^2 = 0.$$

En particulier, A et B commutent.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors la formule est clairement valide car

$$\alpha^0 A + \beta^0 B = A + B = A + I - A = I = M^0.$$

Soit ensuite $n \geq 1$.
Comme $M = \alpha A + \beta B$ et qu'on veut calculer M^n, tout est fait pour nous faire penser à utiliser la formule du binôme. Observons que comme A et B commutent, il en est de même pour αA et βB :

$$\alpha A \cdot \beta B = \alpha\beta AB = \beta\alpha BA = \beta B \cdot \alpha A = 0.$$

De plus, comme $A \in G$, on a $A^2 = A$ et une récurrence immédiate donne $A^k = A$ pour tout $k \geq 1$. De même pour B qui vérifie $B^k = B$, pour tout $k \geq 1$. De plus, $AB = 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} M^n &= (\alpha A + \beta B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\alpha A)^k (\beta B)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}(\beta B)^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(\alpha A)^k(\beta B)^{n-k} + \binom{n}{n}(\alpha A)^n \\ &= \beta^n B + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}\alpha^k\beta^{n-k}AB + \alpha^n A \\ &= \alpha^n A + \beta^n B, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(7) (a) Il faut montrer que 0 est valeur propre de M si et seulement si $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Pour ce faire, on peut exprimer M comme combinaison de A et I et utiliser les valeurs propres de A. Plus précisément,

$$M = \alpha A + \beta B = (\alpha - \beta)A + \beta I$$

de sorte que

$$M - \lambda I = (\alpha - \beta)A + (\beta - \lambda)I.$$

On voit alors que

$$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } M &\iff M-\lambda \text{ non inversible}\\ &\iff (\alpha-\beta)A-(\lambda-\beta)I \text{ non inversible}\\ &\iff \lambda-\beta \text{ valeur propre de } (\alpha-\beta)A\end{aligned}$$

Or,

$$\mathrm{Sp}((\alpha-\beta)A)=(\alpha-\beta)\cdot\mathrm{Sp}(A)=\{0;\alpha-\beta\}.$$

Donc,

$$\mathrm{Sp}(M)=\{\beta;\alpha\}.$$

Ainsi, on a bien

$$\begin{aligned}M \text{ inversible} &\iff 0\notin \mathrm{Sp}(M)\\ &\iff \beta\neq 0 \text{ et } \alpha\neq 0.\end{aligned}$$

Cette proposition de réponse est intéressante (et instructive) mais difficile. On aurait aussi pu proposer la réponse suivante, en s'inspirant de la question d'après. Si M est inversible alors son inverse devrait être $\alpha^{-1}A+\beta^{-1}B$.

☞ Une réponse alternative :

- Si $\alpha=0$ (resp. $\beta=0$) alors $M=\beta B$ (resp. $M=\alpha A$) et M n'est pas inversible en tant que multiple d'une matrice non inversible.

- Si $\alpha\neq 0$ et $\beta\neq 0$, alors
$$\left(\alpha^{-1}A+\beta^{-1}B\right)(\alpha A+\beta B)=A+\alpha^{-1}\beta AB+\beta^{-1}\alpha BA+B=A+B=I,$$
et $M=\alpha A+\beta B$ est bien inversible (et on a même M^{-1}).

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme M est inversible, M^n l'est aussi et on a $(M^n)^{-1}=M^{-n}$. On vérifie donc que $\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B$ est l'inverse de M^n, matrice pour laquelle on a une formule.

$$\begin{aligned}\left(\alpha^{-n}A+\beta^{-n}B\right)\cdot(\alpha^nA+\beta^nB) &= \alpha^0A^2+\alpha^{-n}\beta^nAB+\beta^{-n}\alpha^nBA+\beta^0B^2\\ &= A+B=I,\end{aligned}$$

et on a bien le résultat voulu.

Partie III

Soient $T=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

On considère la suite (X_n) de matrices colonnes définie par $X_0=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et la relation de récurrence:

$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad X_{n+1}=TX_n+Y.$$

(8) Le calcul donne

$$I-T=\begin{pmatrix}-2&-1&-1\\-1&-2&-1\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$$

correspond à une matrice M de F avec $a=-2$ et $b=-1$. Or, on sait d'après ce qui précède que

$$I-T=\alpha A+\beta B$$

avec

$$\alpha=a-b=-2+1=-1,\quad \text{et}\quad \beta=a+2b=-4.$$

On peut donc écrire

$$I - T = -A - 4B.$$

(9) Comme $(-1,-4) \neq (0,0)$, la question $(7a)$ permet d'affirmer que $I - T$ est inversible et la question $(7b)$ donne même

$$\begin{aligned}(I-T)^{-1} &= (-1)^{-1}A + (-4)^{-1}B = -A - \frac{1}{4}B \\ &= \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(10) On utilise la question précédente

$$TL + Y = L \Longleftrightarrow L - TL = Y \Longleftrightarrow (I-T)L = Y \Longleftrightarrow L = (I-T)^{-1}Y.$$

On trouve donc une unique solution L qui s'écrit

$$L = (I-T)^{-1}Y = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ -1 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 \\ 1 \\ 0\end{pmatrix} = -Y.$$

(11) On injecte l'équation de la question précédente. Par définition

$$\begin{aligned}X_{n+1} - L &= TX_n + Y - L = TX_n + Y - TL - Y \\ &= T(X_n - L),\end{aligned}$$

ce qu'on demandait. Une récurrence facile termine la question.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, on a bien

$$X_0 - L = I(X_0 - L) = T^0(X_0 - L).$$

- <u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $X_n - L = T^n(X_0 - L)$. Alors,

$$\begin{aligned}X_{n+1} - L &= T(X_n - L) && \text{(d'après la question précédente)} \\ &= T \cdot T^n(X_0 - L) && \text{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= T^{n+1}(X_0 - L),\end{aligned}$$

ce qui termine cette récurrence très facile.

(12) On pourrait penser qu'il suffit de remplacer par les éléments des questions et parties précédentes.

$$X_n = L + T^n(X_0 - L)$$

On se rend compte alors qu'il faut calculer T^n en fonction de A et B. On peut car T s'exprime à partir de A et B. En effet, on peut voir que

$$T = 2A + 5B$$

de sorte que

$$T^n = 2^n A + 5^n B$$

Il suit finalement que

$$X_n = L + 2^n A(X_0 - L) + 5^n B(X_0 - L).$$

Exercice 2

Pour tout réel $x > 0$, on pose $g(x) = \exp\left(\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$.

Partie I - Étude de la fonction g

(1) Par algèbre des limites,

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

puis par composition avec l'exponentielle, on a donc

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$

De même,

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et il suit que

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = +\infty.$$

(2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$h(x) = \ln(x) + 2x - 1.$$

(a) La fonction h est somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle-même dérivable et, pour tout $x > 0$, on a

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$$

ce qui permet d'affirmer que h est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de R_+^* sur $]\lim_{x\to 0} h(x);\ \lim_{x\to+\infty} h(x)[= \mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par h, noté α sur $\mathbb{R}_+*$.

Comme de plus, $h(1) = 1 > 0 = h(\alpha)$ et $h(1/2) = \ln(1/2) = -\ln(2) < 0$, la stricte croissante de h (et donc de sa bijection réciproque) permet d'affirmer que "les antécédents sont rangés dans le même sens" c'est à dire que

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

(c) La fonction g est la composée, par une exponentielle, d'un produit de combinaison de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est encore dérivable sur ce même intervalle. Comme on a

$$\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2},$$

on a bien

$$g'(x) = \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{h(x)}{x^2} g(x).$$

(d) La question (2) nous donne le tableau de signes de $h(x)$, ce qui permet d'obtenir facilement celui de $g'(x)$ puis les variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
g	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

(e) Par définition de l'exponentielle, pour $x > 0$,

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée, $\ln(x)/x \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On peut donc utiliser le développement limite de $\exp(u)$ en 0 à l'ordre 1 pour écrire

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 + -\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Ceci donne ensuite

$$g(x) = x^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 - x\ln(x) + o(x\ln(x)), \qquad x \to +\infty$$

ou encore

$$g(x) - x^2 = -x\ln(x) + o(x\ln(x))$$

ce qui est équivalent à écrire

$$g(x) - x^2 \sim -x\ln(x), \qquad x \to +\infty.$$

Partie II - Étude d'une suite récurrence

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = g(u_n).$$

(3) Comme demandé, on procède par récurrence.

- initialisation. Pour $n = 0$, u_0 est donné et par hypothèse est strictement positif.

- hérédité. Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et soit strictement positif. En particulier u_n est dans le domaine de définition de g et $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. De plus,

$$u_{n+1} = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) > 0$$

(une exponentielle est toujours strictement positive), ce qui termine cette récurrence facile.

(4) C'est un programme classique qui utilise une boucle `for`.

```
function U=suite(u0, n)
    U=zeros(1, n+1) // on pré-remplit une liste de bonne longueur avec des zéros
    U(1)=u0 // premier terme
    for k=2:n+1
        U(k) = exp((2-1/U(k-1))*log(U(k-1)))
    end
endfunction
```

(5) (a) On reproduit directement le tableau de signe répondant à cette question triviale. Notant $A(x) = (x-1)\ln(x)$ on a

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	||	$-$	0	$+$	
$A(x)$	||	$+$	0	$+$	

En particulier, pour tout $x > 0$, on a $(x-1)\ln(x) \geq 0$.

(b) Soit $x > 0$. On peut écrire

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right).$$

Or, $(x-1)\ln(x)/x \geq 0$ pour $x > 0$. Par composition avec l'exponentielle croissante, on a bien que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} \geq 1.$$

(c) La question précédente donne bien que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geq x$. L'égalité n'est vérifiée que lorsque $g(x)/x = 1$ c'est à dire lorsque

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

(d) La question précédente, appliquée avec $x = u_n > 0$ permet de voir que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geq u_n$$

et donc que la suite (u_n) est toujours croissante.

(6) **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

(a) On procède par récurrence.

- <u>initialisation.</u> Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse donnée par le texte.

- <u>hérédité.</u> Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leq u_n \leq 1$. Attention, g n'est pas croissante sur tout l'intervalle (seulement entre α et 1 !). On fait une disjonction de cas.
  - Si $\alpha \leq u_n \leq 1$, alors, par croissance de g sur cet intervalle, on a
  $$u_{n+1} = g(u_n) \leq g(1) = 1$$
  - Si $1/2 \leq u_n < \alpha$, alors par décroissance de g,
  $$u_{n+1} = g(u_n) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

  Dans les deux cas, on a bien $u_{n+1} \leq 1$. Comme de plus (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n \geq 1/2$ dans tous les cas. La récurrence est terminée.

☞ On aurait aussi pu commencer par montrer la stabilité de l'intervalle $[1/2; 1]$ par g ce qui rendait la récurrence triviale.

(b) La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1). Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite ℓ élément de $[1/2;1]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et par continuité de g sur $[1/2;1]$ (et donc en ℓ), on déduit que ℓ vérifie la relation $\ell = g(\ell)$ ce qui impose d'après une question précédente que $\ell = 1$. Ainsi,
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

(7) **Dans cette question uniquement,** on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Une récurrence immédiate avec la croissance de la suite permet de voir que $u_{n+1} \geq u_n > 1$ et l'hérédité est triviale. On s'en contente (c'est long).

(b) Si la suite (u_n) était majorée, elle convergerait par le théorème de convergence monotone vers une limite ℓ qui vérifierait $\ell \geq u_0 > 1$ et (par le même argument de passage à la limite et de continuité que précédemment) $\ell = g(\ell)$. Or la seule solution possible est $\ell = 1$ et c'est contradictoire avec $\ell > 1$ donc la suite (u_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

(8) **Dans cette question uniquement,** on suppose que $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.

Dans ce cas, on voit (par stricte décroissance de g) que $u_1 = g(u_0) > g(1/2) = 1$. Et donc tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1 à partir du deuxième... On applique le résultat de la question précédente, la suite diverge vers $+\infty$.

Partie III - Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note
$$f(x,y) = x^{y-\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right).$$

(11) On découpe la fonction.

- La fonction $(x,y) \mapsto x$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonction $t \mapsto 1/t$ et $t \mapsto \ln(t)$ sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonctions usuelles).

☞ Par composition, les deux fonctions $(x,y) \mapsto \ln(x)$ et $(x,y) \mapsto 1/x$ sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- La fonction $(x,y) \mapsto y$ est polynomiale donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

☞ Par somme, la fonction $(x,y) \mapsto y - 1/x$ est encore de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.
☞ Par produit, la fonction $(x,y) \mapsto \left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)$ est encore de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- La fonction $t \mapsto e^t$ est une fonction usuelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

☞ Par composition la fonction f est bien e classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(12) Par formules de dérivations,
$$\begin{aligned}
\partial_1 f(x,y) &= \partial_1\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) f(x,y)\\
&= \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) f(x,y)\\
&= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y)
\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}
\partial_2 f(x,y) &= \partial_2\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) f(x,y)\\
&= \ln(x) f(x,y)
\end{aligned}$$

(13) Une exponentielle n'étant jamais nulle

$$(x,y) \text{ point critique de } f \iff \begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \dfrac{\ln(x)+xy-1}{x^2} &= 0 \\ \ln(x) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y-1 &= 0 \\ x &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases}$$

Ainsi, f admet un unique point critique, noté a, de coordonnées $(1,1)$.

(14) On dérive à nouveau... C'est assez lourd...Sauf qu'on va quand même ensuite évaluer en $(1,1)$ et on sait que $\partial_1 f(1,1) = \partial_2 f(1,1) = 0$ ce qui permet d'alléger un peu la présentation des calculs et résultats.

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,1} f(x,y) &= \frac{(1/x+y)\times x^2 - 2x(\ln(x)+xy-1)}{x^4} f(x,y) + \partial_1 f(x,y) \\ &= \frac{x+x^2y-2x(\ln(x)+xy-1)}{x^4} f(x,y) + \partial_1 f(x,y) \end{aligned}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \ln(x)\partial_2 f(x,y) = \ln(x)^2 f(x,y)$$

$$\begin{aligned} \partial^2_{1,2} f(x,y) &= \frac{f(x,y)}{x} + \ln(x)\partial_1 f(x,y) \\ &= \partial_{2,1} f(x,y) \end{aligned}$$

On remplace x et y par 1. Comme $f(1,1) = 1$, on trouve

$$\partial^2_{1,1} f(1,1) = 2, \qquad \partial^2_{1,2} f(1,1) = \partial^2_{2,1} f(1,1) = 1, \qquad \partial^2_{2,2} f(1,1) = 0$$

et on a bien

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(15) Pour déterminer la nature au point critique, il faut connaître le signe des valeurs propres de la hessienne. On note H la matrice hessienne obtenue à la question précédente.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } H &\iff H-\lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \det(H-\lambda I) = 0 \\ &\iff -\lambda(2-\lambda) - 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \\ &\iff \lambda = 1+\sqrt{2} \text{ ou } \lambda = 1-\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de la hessienne au point critique sont de signe opposé donc f présente un point col : ce n'est pas un extremum. On ne résiste pas à l'envie d'illustrer ce résultat avec une figure, ci-après.

(16) Le domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert. Si f admet un extremum global sur celui-ci, c'est nécessairement en un point critique. Or, en l'unique point critique, f présente un point col. Il n'y a donc pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

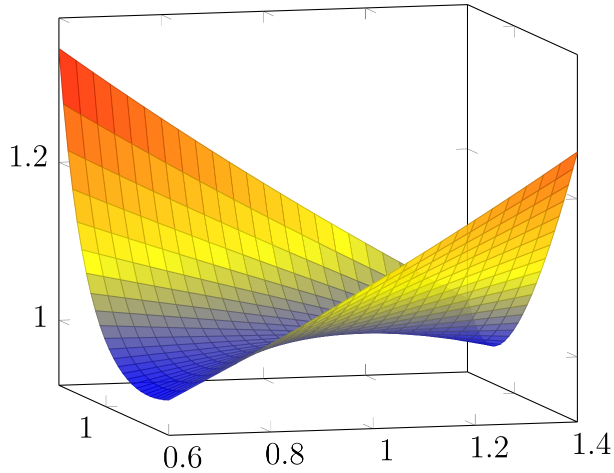

Figure 1. Point col de la fonction f.

Exercice 3

On dispose de trois urnes U_1, U_2 et U_3, et d'une infinité de jetons numérotés $1, 2, 3, 4, \ldots$
On répartit un par un les jetons dans les urnes : pour chaque jeton, on choisit au hasard et avec équiprobabilité une des trois urnes dans laquelle on place le jeton. Le placement de chaque jeton est indépendant de tous les autres jetons, et la capacité des urnes en nombre de jetons n'est pas limitée.

Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n (respectivement Y_n, Z_n) le nombre de jetons présents dans l'urne 1 (respectivement l'urne 2, l'urne 3) après avoir réparti les n premiers jetons.

Partie I

Pour tout entier naturel n non nul, on note V_n l'événement : "Après la répartition des n premiers jetons, au moins une urne reste vide".

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) En interprétant comme succès "le jeton est placé dans l'urne 1 (dont la probabilité est égale à 1/3) (resp. 2, 3)", X_n (resp. Y_n, Z_n) correspond à une répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli. On peut donc conclure que X_n, Y_n et Z_n suivent toutes trois une loi binomiale $\mathcal{B}(n, 1/3)$.

(b) D'après le cours,
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n, \qquad \text{et} \qquad P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

(c) $[(Y_n = 0) \cap (Z_n = 0)]$ signifie qu'après avoir placé les n premiers jetons, les urnes 2 et 3 n'en contiennent aucun: on a donc placé tous les jetons (au nombre de n) dans l'urne 1, c'est à dire que $(X_n = n)$. On a bien l'égalité voulue.

(d) Il est clair que
$$V_n = [X_n = 0] \cup [Y_n = 0] \cup [Z_n = 0].$$

(e) Par la formule du crible, on a
$$\begin{aligned} P(V_n) &= P(X_n = 0) + P(Y_n = 0) + P(Z_n = 0) \\ &\quad - P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) - P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) - P([Z_n = 0] \cap [X_n = 0]) \\ &\quad + P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) \end{aligned}$$

Or, les trois urnes ne peuvent pas être simultanément vides après avoir placé n jetons donc
$$P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) = 0$$

et par ce qui précède (en reproduisant le raisonnement)

$$P([X_n = 0] \cap [Y_n = 0]) = P([Y_n = 0] \cap [Z_n = 0]) = P([Z_n = 0] \cap [X_n = 0]) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Il suit que

$$P(V_n) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

comme demandé.

(2) On note V l'événement : "Au moins l'une des trois urnes reste toujours vide". On constate qu'on peut écrire

$$V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

En effet, si au moins une urne reste toujours vide, on a donc la réalisation de V_n pour tout n. Or la suite d'évènements (V_n) est décroissante au sens de l'inclusion :

$$V_{n+1} \subset V_n$$

(si au moins une des urnes est vide après les $n+1$ premiers jetons, elle l'était nécessairement après n'avoir placé que les n premiers). Par le théorème de la limite monotone, on a donc

$$P(V) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.\right) = \lim_{n \to +\infty} P(V_n) = 0$$

car $(2/3)^n \to 0$ et $(1/3)^n \to 0$ également.

(3) Soit T la variable aléatoire égale au nombre de jetons nécessaires pour que, pour la première fois, chaque urne contienne au moins un jeton.

(a) On complète ce programme sans difficulté. On va continuer à ajouter des jetons *tant qu'*il y a au moins un zéro dans la liste correspondant au nombre de jetons par urne. Pour cela on cherche les composantes de `liste` égales à 0 avec la commande `find( )` et on compte combien il y en a avec la commande `length( )`.

```
function t=T( )
  X=0
  Y=0
  Z=0
  n=0
  liste=[X,Y,Z]
  while length(find(liste == 0)) >=1
    i=grand(1,1,'uin',1,3)  // choix d'un entier entre 1 et 3
    liste(i)=liste(i) + 1 // l'urne i reçoit un jeton de plus
    n=n+1
  end
  t=n
endfunction
```

Une alternative pour la condition dans la boucle `while` serait de continuer tant que la minimum de la `liste` est égal à 0

```
while min(liste) == 0
```

(b) On peut obtenir une valeur approchée de l'espérance d'une variable (quand celle-ci existe) à l'aide de la moyenne empirique d'un $n-$ échantillon de cette variable, avec n aussi grand que possible. Ici, le sujet propose $n = 10000$. On stocke donc 10000 réalisations de la variable T simulée avec la fonction ci-avant et on en fait la moyenne.

```
ech=zeros(1, 10000)
for k=1:10000
    ech(k) = T( )
end
est=mean(ech)
disp(est)
```

(4) Il faut au moins placer 3 jetons si on veut espérer remplir les 3 urnes, mais on peut attendre arbitrairement longtemps, en remplissant successivement les mêmes urnes. On a donc clairement $T(\Omega) = [\![3; +\infty[\![$.

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Observons que

$$[T = n] \cup V_n = V_{n-1}.$$

En effet, si au moins une urne est vide après $n-1$ jetons placés, il y a deux situations (incompatibles): ou bien il reste encore au moins une urne vide après le $n-$ième jeton (c'est à dire V_n) ou bien, on remplit toutes les urnes pour la première fois avec le $n)$ième jeton (c'est à dire $[T = n]$). L'incompatibilité donne bien

$$P(T = n) + P(V_n) = P(V_{n-1}) \iff P(T = n) = P(V_{n-1}) - P(V_n).$$

(6) On peut commencer par expliciter la loi de T. D'après les questions précédentes, on a, pour $n \geq 3$,

$$\begin{aligned}
P(T = n) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 3\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\
&= 3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{3} - 1\right)\right] \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

On revient ensuite à la définition de l'espérance.

$$\begin{aligned}
T \text{ admet une espérance} &\iff \sum nP(T = n) \text{ converge (absolument)} \\
&\iff \sum n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad \text{converge}
\end{aligned}$$

Or,

$$n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) = n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

et on reconnait une combinaison linéaire de termes généraux de séries géométriques dérivées convergentes (de raisons respectives $2/3$ et $1/3$). Donc T admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2\sum_{n=3}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{(1 - 2/3)^2} - 1 - \frac{4}{3} - 2\left(\frac{1}{(1 - 1/3)^2} - 1 - \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{11}{2}.
\end{aligned}$$

Partie II

Pour tout entier naturel n non nul, on note W_n la variable aléatoire égale au nombre d'urne(s) encore vide(s) après le placement des n premiers jetons.

(7) (a) Commençons par observer qu'après avoir placé 2 jetons on a entre 1 et 2 urnes vides. Connaissant combien de jetons contient l'urne 1 grâce à X_2, on sait ce qui se passe. On peut écrire le tableau de la loi conjointe. On introduit aussi N_i la variable qui renvoie le numéro de l'urne dans laquelle on place le jeton i. D'après les hypothèses, les variables N_i sont indépendantes et suivent toutes des lois uniformes sur $[\![1;3]\!]$.

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0 \cap W_2 = 1) &= P([N_1 = 2 \cap N_2 = 3] \cup [N_1 = 3 \cap N_2 = 2]) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0 \cap W_2 = 2) &= P([N_1 = 2 \cap N_2 = 2] \cup [N_1 = 3 \cap N_2 = 3]) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1 \cap W_2 = 1) &= P([N_1 = 1 \cap N_2 = 2] \cup [N_1 = 1 \cap N_2 = 3] \cup [N_1 = 2 \cap N_2 = 1] \cup [N_1 = 3 \cap N_2 = 1]) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1 \cap W_2 = 2) &= 0 \qquad \text{(impossible)} \\ P(X_2 = 2 \cap W_2 = 1) &= 0 \qquad \text{(impossible)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 2 \cap W_2 = 2) &= P([N_1 = 1 \cap N_2 = 1]) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Ce qui donne le tableau :

$X_2 \backslash W_2$	1	2
0	2/9	2/9
1	4/9	0
2	0	1/9

(b) On en déduit, en sommant les termes de chaque colonne (formule des probabilités totales avec le s.c.e $\{[X_2 = i] : \ i \in [\![0;2]\!]\}$), la loi de W_2:

j	1	2
$P(W_2 = j)$	2/3	1/3

(c) La covariance de W_2 et X_2 se calcule avec la formule

$$\operatorname{cov}(X_2, W_2) = E(X_2 W_2) - E(X_2)E(W_2).$$

Connaissant la loi de X_2 (le cours donne $E(X_2) = 2/3$) et la loi de W_2 par la question précédente, on a $E(W_2) = 4/3$. Le tableau de la loi conjointe donne

$$E(X_2 W_2) = 4/9 + 4/9 = 8/9$$

et au final, on trouve

$$\operatorname{cov}(X_2, W_2) = \frac{8}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = 0.$$

(d) La covariance des deux variables est nulle, mais attention, il ne s'agit pas de conclure qu'elles sont indépendantes : c'est la réciproque qui est vraie. Ici, elle ne sont pas indépendantes. On peut proposer comme contre-exemple

$$P(X_2 = 1 \cap W_2 = 2) = 0 \neq P(X_2 = 1)P(W_2 = 2).$$

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

(8) On peut avoir placé tous les jetons dans la même urne (auquel cas $W_n = 2$), ou dans deux urnes différentes (auquel cas $W_n = 1$) ou dans les trois (ce qui donne $W_n = 0$). On a donc

$$W_n(\Omega) = [\![0, 2]\!].$$

(9) Pour $i \in [\![1, 3]\!]$, on note $W_{n,i}$ la variable aléatoire égale à 1 si l'urne i est encore vide après le placement des n premiers jetons, et qui vaut 0 sinon.

(a) $W_{n,i}$ est une variable de Bernoulli. Son espérance est donc égale à son paramètre. L'urne 1 (resp. 2, 3) est vide si $X_n = 0$ (resp. $Y_n = 0$, $Z_n = 0$). Les trois évènements susmentionnés ayant la même probabilité on a, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$

$$E(W_{n,i}) \quad = \quad P(W_{n,i} = 1) = P(X_n = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Il est clair que

$$W_n = W_{n,1} + W_{n,2} + W_{n,3}.$$

(c) Par linéarité de l'espérance, on a donc

$$E(W_n) = E(W_{n,1}) + E(W_{n,2}) + E(W_{n,3}) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(10) Comme

$$[X_n = n] = [X_n = n] \cap [W_n = 2],$$

on a

$$P\left([X_n = n] \cap [W_n = 2]\right) = P(X_n = n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

D'autre part, si $W_n = 2$ alors tous les jetons sont placés dans la même urne et il n'est pas possible d'avoir; chaque urne contient donc 0 ou n jetons et donc

$$P\left([X_n = k] \cap [W_n = 2]\right) = 0, \qquad k \in [\![1, n-1]\!].$$

(11) On s'intéresse à l'évènement

$$[X_n = k] \cap [W_n = 1], \qquad k \in [\![1, n-1]\!].$$

Cet évènement signifie qu'on a placé k des n jetons dans l'urne 1 et les $n - k$ jetons restants dans une (et même) autre urne. Il y a 2 façons de choisir la deuxième urne à remplir. Il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir les k jetons parmi les n que l'on va mettre dans l'urne 1, les autres étant automatiquement placés dans la deuxième urne choisie. Pour chacune de ces possibilités, la probabilité est $(1/3)^n$. On a bien

$$P([X_n = k] \cap [W_n = 1]) = 2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

Naturellement, si $[X_n = n]$ tous les jetons sont placés dans la même urne et il y en a deux qui restent vides; ainsi

$$P(X_n = n \cap W_n = 1) = 0.$$

(12) Par le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{2} kiP(X_n = k \cap W_n = i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{2} kiP(X_n = k \cap W_n = i) \\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X_n = k \cap W_n = 1) + \sum_{k=1}^{n-1} 2kP(X_n = k \cap W_n = 2) + 2nP(X_n = n \cap W_n = 2) \\
&= 2nP(X_n = n \cap W_n = 2) + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1)
\end{aligned}$$

comme demandé.

(13) On poursuit le calcul en ajoutant le résultat obtenu plus haut. On va aussi utiliser la formule classique (dont on omet la preuve)

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

$$\begin{aligned}
E(X_nW_n) &= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k \cap W_n = 1) \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{k=1}^{n-1} k2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} \\
&= 2n\left(\frac{1}{3}\right)^n 2^{n-1} \qquad \text{(formule du binôme)} \\
&= n\left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

comme demandé.

On calcule ensuite la covariance avec la même formule que plus haut. Comme $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/3)$, on a

$$E(X_n) = \frac{n}{3}.$$

Il suit que

$$\mathrm{cov}(X_n, W_n) = E(X_n W_n) - E(X_n)E(W_n) = n\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{n}{3} \times 3\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0.$$

(14) La covariance précédente est nulle, pourtant (tout comme précédemment pour $n = 2$) les variables X_n et W_n ne sont pas indépendantes fournissant un nouveau contre-exemple à la réciproque du résultat du cours affirmant que si deux variables aléatoires sont indépendantes, leur covariance est nulle.