EML, voie ECE - Épreuve de mathématiques du 4 mai 2022

Corrigé proposé par Romain Meurant pour l'APHEC. Toute suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue : romain.meurant@lycee-descartes.ma

Exercice 1

Partie A

1. Comme $X(\Omega) = \mathbb{N}$, on a : $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathrm{P}(Y = k) = \mathrm{P}(X + 1 = k) = \mathrm{P}(X = k - 1) = q^{k-1}p.$$

Ainsi, la variable aléatoire Y suit la loi géométrique de paramètre p.

2. On en déduit que Y admet une espérance et une variance de valeurs :

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{1}{p} \quad ; \quad \mathrm{V}(Y) = \frac{q}{p^2}.$$

Comme transformée affine de Y, la variable aléatoire $X = Y - 1$ admet donc elle aussi une espérance et une variance :

— par linéarité de E : $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) - 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{q}{p}$,

— par propriété de V : $\mathrm{V}(X) = \mathrm{V}(Y) = \dfrac{q}{p^2}$.

3.

```
function X=simule_X(p)
    Y = 1
    while rand() > p
        Y = Y + 1
    end
    X = Y - 1
endfunction
```

Partie B

4.

```
function Z=simule_Z(n,p)
    Z = 1
    for i = 1:n    // i = numéro de la partie
        s = 0          // s = nombre de jetons gagnés sur la partie i
        for j = 1:Z    // j = numéro du jeton joué
            s = s + simule_X(p)
        end
        Z = s
    end
endfunction
```

On notera que, à l'intérieur de la première boucle, si `Z` vaut 0 à un moment donné, alors le contenu de la deuxième boucle ne s'exécute pas (en `Scilab`, une boucle de la forme « `for j = 1:0` » ne provoque pas d'erreur) et `s` (et donc aussi `Z`) conserve la valeur 0.

5. (a) Comme la variable aléatoire Z_0 est certaine égale à 1 :

$$u_0 = \mathrm{P}(Z_0 = 0) = 0.$$

Comme Z_1 suit la loi de X :

$$u_1 = \mathrm{P}(Z_1 = 0) = P(X = 0) = p.$$

(b) Si le joueur n'a plus de jetons à l'issue de la n-ème activation, alors la machine ne lui donnera aucun jeton après l'activation suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (Z_n = 0) \subset (Z_{n+1} = 0).$$

On en déduit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \mathrm{P}(Z_n = 0) \leq \mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) = u_{n+1}$$

c'est-à-dire que la suite u est croissante.
Cette suite étant par ailleurs majorée par 1 (car u_n est une probabilité), on en déduit qu'elle converge.

6. L'événement R signifie qu'à partir d'un certain nombre d'activations de la machine, le joueur n'a plus de jeton. On peut écrire :

$$R = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0).$$

La suite d'événements $\big((Z_n = 0)\big)_{n \geq 0}$ étant par ailleurs croissante d'après 5.b., le théorème de la limite monotone donne :

$$\mathrm{P}(R) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (Z_n = 0)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(Z_n = 0) = \lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

7. (a) Si le joueur active une seconde fois la machine après avoir introduit les k jetons qu'il a gagné lors de la première partie, alors il obtient un nombre de jetons égal à $Z_2 = X_1 + \cdots + X_k$ où les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ sont indépendantes

et de même loi que X.
Dans ce cas, comme les variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$ sont positives :

$$(Z_2 = 0) = (X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_k = 0)$$

et donc :

$$\mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \mathrm{P}_{(Z_1=k)}\big((X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_k = 0)\big)$$

De plus, les fonctionnements de la machine sont indépendants les uns des autres et indépendants du nombre de jetons introduits, donc les événements

$$(X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_k = 0) \quad \text{et} \quad (Z_1 = k)$$

sont indépendants ; ainsi :

$$\mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \mathrm{P}\big((X_1 = 0) \cap \cdots \cap (X_k = 0)\big).$$

Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_k$ sont indépendantes :

$$\mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \mathrm{P}(X_1 = 0) \times \cdots \times \mathrm{P}(X_k = 0)$$

et de même loi que X :

$$\mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_2 = 0) = \underbrace{\big(\mathrm{P}(X = 0)\big)^k = (u_1)^k}_{\text{(d'après 5.a.)}}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $\{(Z_1 = k)\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \overbrace{\mathrm{P}(Z_1 = k)}^{\mathrm{P}(X=k)} \times \mathrm{P}_{(Z_1=k)}(Z_{n+1} = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} q^k p \times (u_n)^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} (q \times u_n)^k.\end{aligned}$$

Notons que $0 \leq qu_n < 1$ (puisque $0 < q < 1$ et $0 \leq u_n \leq 1$) ; la série $\sum_{k \geq 0} (q \times u_n)^k$ est donc bien convergente et on a :

$$u_{n+1} = \mathrm{P}(Z_{n+1} = 0) = \frac{p}{1 - qu_n}.$$

8. (a) Comme $0 < q < 1$ et $0 \leq \ell \leq 1$, on a $q\ell < 1$ et donc $1 - q\ell \neq 0$.
D'après 7.b., la limite ℓ de u vérifie :

$$\ell = \frac{p}{1 - q\ell} \iff \ell - q\ell^2 = p \iff q\ell^2 - \ell + p = 0.$$

Développons par ailleurs l'expression donnée dans l'énoncé :

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = q\ell^2 - p\ell - q\ell + p = q\ell^2 - \underbrace{(p + q)}_{=1} \ell + p = q\ell^2 - \ell + p.$$

Par conséquent, le réel ℓ vérifie :

$$(\ell - 1)(q\ell - p) = 0.$$

(b) Au moins l'un des deux facteurs est nul :

$$\ell = 1 \text{ ou } q\ell - p = 0.$$

Supposons que $p \geq \dfrac{1}{2}$. Si $\ell < 1$, alors $q\ell - p = 0$ et donc :

$$\underbrace{\overbrace{q}^{\leq \frac{1}{2}} \times \overbrace{\ell}^{<1}}_{< \frac{1}{2}} - \underbrace{p}_{\geq \frac{1}{2}} < 0$$

ce qui est contradictoire.
Par conséquent :

$$\text{si } p \geq \frac{1}{2} \text{ alors } \mathrm{P}(R) = \ell = 1.$$

(c) La suite u est positive (pour tout n, u_n est une probabilité).
Prouvons par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq pq.$$

— *Initialisation.* C'est clair pour $n = 0$ puisque $u_0 = 0$ (5.a.).

— *Hérédité.* Supposons pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé que $u_n \in \left[0; \dfrac{p}{q}\right]$. Alors :

$$1 - qu_n \geq 1 - q \times \frac{p}{q} = 1 - p = q \text{ donc } \frac{1}{1 - qu_n} \leq \frac{1}{q}.$$

Avec 7.b. :

$$u_{n+1} = \frac{p}{1 - qu_n} \leq \frac{p}{q}.$$

On a ainsi prouvé le résultat souhaité par récurrence.

La limite ℓ de la suite u vérifie donc cette même inégalité large :

$$\mathrm{P}(R) = \ell \leq \frac{p}{q}.$$

Comme $p < \frac{1}{2}$, on a : $\quad q = 1 - p > \frac{1}{2} > p$ et donc $\frac{p}{q} < 1$. Finalement :

$$\mathrm{P}(R) < 1.$$

(d) Pour que la machine soit rentable, le casino préfèrera que les joueurs finissent par ne plus avoir de jetons après un certain nombre de parties où ils auront remisé tous les jetons à chaque fois. C'est le cas lorsque $\mathrm{P}(R) = 1$ c'est-à-dire $\ell \geq \frac{1}{2}$.

Partie C

9. L'événement $(Z_n = 0)$ signifie que le joueur n'a aucun jeton après n activations de la machine ; il a donc perdu tous ces jetons lors des n premières activations. Ainsi $(Z_n = 0) = (T \leq n)$ et donc :

$$u_n = \mathrm{P}(Z_n = 0) = \mathrm{P}(T \leq n).$$

En écrivant :
$$(T \leq n) = (T = n) \cup (T \leq n-1)$$
on a l'union de deux événements incompatibles, donc :

$$\mathrm{P}(T \leq n) = \mathrm{P}(T = n) + \mathrm{P}(T \leq n-1)$$

et ainsi :

$$\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \leq n) - \mathrm{P}(T \leq n-1) = u_n - u_{n-1} = v_{n-1} - v_n.$$

10. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T = n) = \sum_{n=1}^{N} n(v_{n+1} - v_n) = \sum_{n=1}^{N} nv_{n+1} - \sum_{n=1}^{N} nv_n$$

On effectue un changement d'indice dans la première somme que l'on coupe ensuite en deux :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T = n) &= \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)v_n - \sum_{n=1}^{N} nv_n \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{nv_n}_{\substack{=0 \\ \text{si } n=0}} + \sum_{n=0}^{N-1} v_n - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} nv_n}_{\substack{\text{on sépare le} \\ \text{dernier terme}}} \\ &= \cancel{\sum_{n=1}^{N-1} nv_n} + \sum_{n=0}^{N-1} v_n - \cancel{\sum_{n=1}^{N-1} nv_n} - Nv_N.\end{aligned}$$

On a bien obtenu :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N.$$

11. (a) La question 7.b. avec $p = \frac{1}{2}$ donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{u_n}{2}} = \frac{1}{2 - u_n}.$$

Prouvons par récurrence sur n que : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{n}{n+1}$.

— *Initialisation.* C'est clair pour $n = 0$ puisque $u_0 = 0$.

— *Hérédité.* Supposons, pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, que $u_n = \frac{n}{n+1}$. Alors :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2-n} = \frac{n+1}{n+2}.$$

(b) Ceci nous donne, avec la question 10. :

$$\begin{aligned}\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T = n) &= \sum_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) - N\left(1 - \frac{N}{N+1}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} - \frac{N}{N+1}\end{aligned}$$

On reconnaît la somme partielle $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1}$ de la série harmonique. Cette série à terme général positif étant divergente, sa somme partielle tend vers $+\infty$.
Par ailleurs, le terme $-\frac{N}{N+1}$ converge (vers -1) pour $N \to +\infty$.
Ainsi :

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T = n) \underset{N \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

ce qui prouve que la série $\sum_{n \geq 1} n\mathrm{P}(T = n)$ diverge et donc que T n'admet pas d'espérance.

12. *On notera que, avec l'hypothèse $p > \dfrac{1}{2}$, on a $p > q$ donc $\dfrac{p}{q} > 1$; par ailleurs, la suite u est majorée par 1. Ainsi, le dénominateur $\dfrac{p}{q} - u_n$ dans la fraction définissant w_n est non nul (strictement positif).*
On notera aussi que $0 < w < 1$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise la relation entre u_{n+1} et u_n établie en 7.b. ; ensuite c'est un peu calculatoire :

$$w_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{\frac{p}{q}-u_{n+1}} = \frac{1-\frac{p}{1-qu_n}}{\frac{p}{q}-\frac{p}{1-qu_n}} = \frac{1-qu_n-p}{\cancel{1-qu_n}} \times \frac{q\,\cancel{(1-qu_n)}}{p(1-qu_n)-pq}$$
$$= \frac{q(1-u_n)\times q}{p(1-qu_n-q)} = \frac{q^2(1-u_n)}{p(p-qu_n)} = \frac{q^2(1-u_n)}{pq\left(\frac{p}{q}-u_n\right)} = \frac{q}{p}w_n.$$

(b) La suite w est donc géométrique, de raison $\dfrac{q}{p}$ et de premier terme $w_0 = \dfrac{1-u_0}{\frac{p}{q}-u_0} = \dfrac{q}{p}$ (on a $u_0 = 0$). Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}.$$

Il faut maintenant « renverser » l'égalité définissant w à l'aide de u :

$$w_n = \frac{1-u_n}{\frac{p}{q}-u_n} \iff \left(\frac{p}{q}-u_n\right)w_n = 1-u_n \iff u_n(1-w_n) = 1-\frac{p}{q}w_n$$
$$\iff u_n = \frac{1-\frac{p}{q}w_n}{1-w_n}$$

Ainsi, avec l'expression de w trouvée précédemment :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^n}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}.$$

Comme $0 < \dfrac{q}{p} < 1$, on a $0 < 1-\left(\dfrac{q}{p}\right)^{n+1} < 1$. Ainsi :

$$1-v_n = u_n \geq 1-\left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

Par conséquent :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq v_n \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n.$$

(c) D'après la question 10., pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\mathrm{P}(T=n) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n - Nv_N.$$

— Comme $\dfrac{q}{p} < 1$, la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\left(\frac{q}{p}\right)^n$ converge. Par critère de comparaison des séries à terme général positif, on déduit de la question précédente que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ converge également avec :

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{q}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{q}{p}}$$

— On obtient aussi de la question précédente :

$$0 \leq Nv_N \leq N\left(\frac{q}{p}\right)^N.$$

Par croissances comparées, comme $0 < \dfrac{q}{p} < 1$, on a $N\left(\dfrac{q}{p}\right)^N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Avec le théorème d'encadrement :

$$Nv_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En conclusion, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mathrm{P}(T=n)$ converge, c'est-à-dire que T admet une espérance, vérifiant :

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{P}(T=n) \leq \frac{1}{1-\frac{q}{p}}.$$

13. Le casino peut choisir la valeur $p = \dfrac{1}{2}$ de sorte que le joueur passe beaucoup de temps sur la machine (puisque dans ce cas, la variable aléatoire T prend plus souvent des grandes valeurs), tout en perdant tous ses jetons après un certain nombre d'activations.

*

* *

Un bon exercice, progressif en difficulté. Il fait appel à des outils variés de probabilités et d'analyse, sans redondance dans leurs utilisations.

On aurait apprécié que l'énoncé nous demande, en partie C, d'*écrire* une fonction `Scilab` permettant de simuler T. En effet, les deux seules questions d'informatique de ce sujet (qui sont dans cet exercice) étaient du même format (programme à compléter).

En s'inspirant de la fonction `simul_Z` de la question 4., on remplace la première boucle `for` par une boucle `while` (on continue tant que le joueur a encore des jetons), mais on numérote toujours les activations de la machine avec une variable `i` qui, une fois la boucle `while` terminée, correspondra à la valeur de `T` :

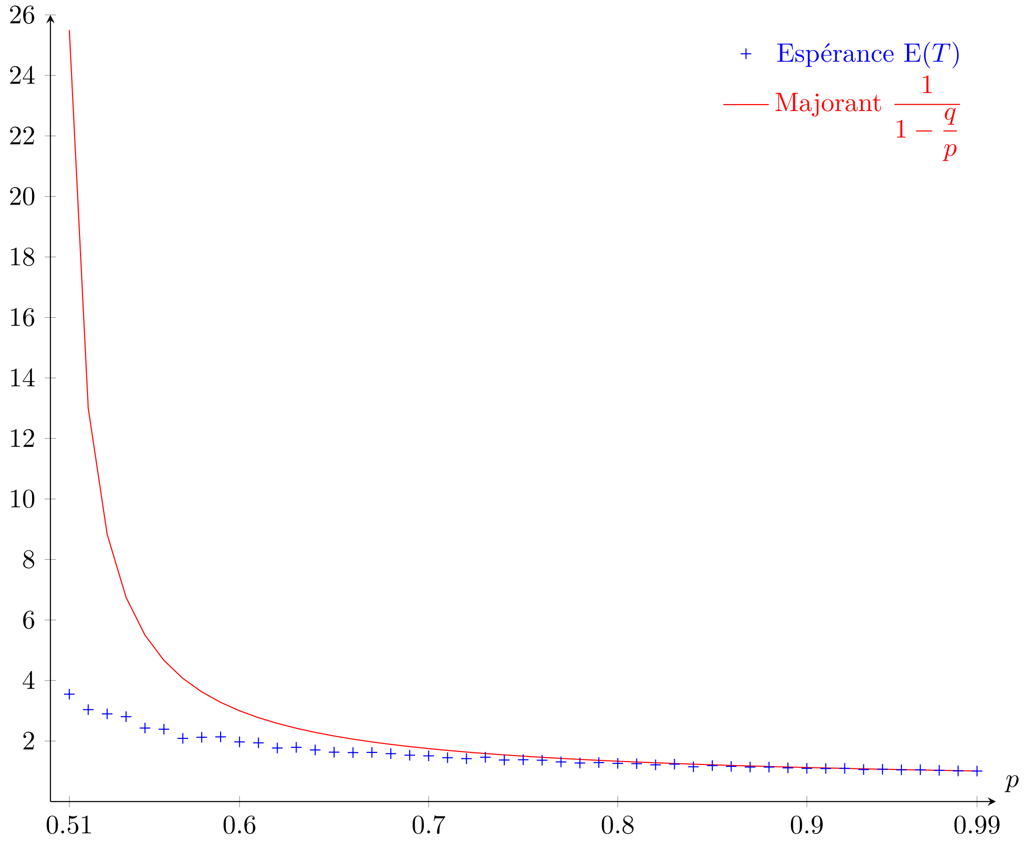
```
function T=simule_T(p)
    Z = 1
    i = 0               // i = numéro de la partie
    while Z > 0
        s = 0           // s = nombre de jetons gagnés sur la partie i
        for j = 1:Z     // j = numéro du jeton joué
            s = s + simule_X(p)
        end
        Z = s
        i = i+1
    end
    T = i
endfunction
```

Le script suivant permet alors de visualiser, en fonction de $p \in \left]\frac{1}{2};1\right[$, la valeur de l'espérance $\mathrm{E}(T)$ (obtenue par la méthode de Monte-Carlo, avec par exemple 1000 simulations de T) et de son majorant $\dfrac{1}{1-\frac{q}{p}}$ obtenu en question 12.

```
E_T = []
x = 0.51:0.01:0.99
for p=x
    E = 0
    for k=1:1000
        E = E+simule_T(p)
    end
    E_T = [E_T, E/1000]
end

plot(x,E_T)
plot(x, 1 ./ (1-(1-x)./x),'r')
xlabel('p')
legend('E(T)','1/(1-q/p)')
```

On constate que ce majorant est en fait très supérieur à $\mathrm{E}(T)$ lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$:



Même si ce n'est pas évident sur le dessin, on a bien $\mathrm{E}(T) \underset{p\to\frac{1}{2}^+}{\longrightarrow} +\infty$ (cette divergence est très lente).

Exercice 2

1. (a) Soient $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
La trace de la matrice
$$\alpha M + \beta M' = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$$
est égale à :
$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\alpha M + \beta M') &= \alpha a + \beta a' + \alpha d + \beta d' \\ &= \alpha(a+d) + \beta(a'+d') \\ &= \alpha \mathrm{tr}(M) + \beta \mathrm{tr}(M'). \end{aligned}$$
Ainsi, l'application $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire.

(b) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :
$$M \in \mathrm{Ker(tr)} \iff a + d = 0 \iff M = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Les trois matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ formant par ailleurs clairement une famille libre, elles donnent une base du noyau de tr.
Ce noyau est donc de dimension 3.

2. Soient $M, M' \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En utilisant la linéarité de la trace :
$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta M') &= \alpha M + \beta M' + \mathrm{tr}\left(\alpha M + \beta M'\right) J \\ &= \alpha M + \beta M' + \big(\alpha \mathrm{tr}(M) + \beta \mathrm{tr}\left(M'\right)\big) J \\ &= \alpha M + \alpha \mathrm{tr}(M) J + \beta M' + \beta \mathrm{tr}\left(M'\right) J \\ &= \alpha\big(M + \alpha \mathrm{tr}(M) J\big) + \beta\big(M' + \mathrm{tr}\left(M'\right) J\big) \\ &= \alpha f(M) + \beta f\left(M'\right) \end{aligned}$$
Ainsi, l'application f est linéaire. Il s'agit de plus d'une application de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même. Par conséquent, f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. (a) Il est commode pour cette question de nommer les matrices de la base $\mathcal{B}$; posons :
$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
On note tout d'abord que $J = 2E_2 + E_3$.
On calcule et on écrit dans la base $\mathcal{B}$ les images de chacune de ses matrices par f :
$$f(E_1) = E_1 + \mathrm{tr}(E_1) J = E_1 + J = E_1 + 2E_2 + E_3$$
$$\begin{aligned} f(E_2) &= E_2 + \mathrm{tr}(E_2) J = E_2 + 0J = E_2 \\ f(E_3) &= E_3 + \mathrm{tr}(E_3) J = E_3 + 0J = E_3 \\ f(E_4) &= E_4 + \mathrm{tr}(E_4) J = E_4 + J = 2E_2 + E_3 + E_4 \end{aligned}$$
On en déduit la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On calcule :
$$A - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad (A - I_4)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(c) La matrice A est donc annulée par le polynôme $(X-1)^2 \in \mathbb{R}[X]$ qui admet 1 comme unique racine. Par le cours, les valeurs propres de A sont racines de ce polynôme :
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}.$$
Il reste à savoir si 1 est valeur propre de A et si A est diagonalisable.
Proposons deux méthodes :

— *Première méthode.*

On résout le système d'équations correspondant à $AX = X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$:
$$\begin{aligned} AX = X &\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ 2x + y + 2t &=& y \\ x + z + t &=& z \\ t &=& t \end{array} \right. \\ &\iff x + t = 0 \end{aligned}$$
Ce système admet des solutions non nulles, ce qui prouve que 1 est valeur propre de A.
L'espace propre associé est de dimension 3. La matrice A n'est donc pas diagonalisable puisque :
$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim \mathrm{E}_A(\lambda) = 3 < 4.$$

— *Deuxième méthode.*
Comme $f(E_2) = E_2$, 1 est valeur propre de f (et E_2 est un vecteur propre associé) et donc aussi de A :

$$\mathrm{Sp}(A) = \{1\}.$$

Si A était diagonalisable, alors on pourrait écrire $P^{-1}AP = D$ où $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est une matrice inversible et $D \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ une matrice diagonale à coefficients diagonaux tous égaux à l'unique valeur propre de A, 1, donc $D = I_4$. On aurait alors : $P^{-1}AP = I_4$ d'où $A = PI_4P^{-1} = I_4$ ce qui est absurde.
La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

Si l'énoncé avait demandé d'expliciter l'espace propre de A associé à la valeur propre 1, alors seule la première méthode aurait permis de répondre complètement à la question. On a :

$$\mathrm{E}_A(1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right).$$

(d) La matrice A est inversible car 0 n'en est pas valeur propre.
Calculons l'inverse de A :

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\\ 2x+y+2t &=& b\\ x+z+t &=& c\\ t &=& d\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\\ 2a+y+2d &=& b\\ a+z+d &=& c\\ t &=& d\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& a\\ y &=& -2a+b-2d\\ z &=& -a+c-d\\ t &=& d\end{array}\right.$$

On obtient donc :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & -2\\ -1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

4. (a) Toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de trace nulle vérifie $f(M) = M$.
Donc 1 est valeur propre de f avec un espace propre contenant $\mathrm{Ker(tr)}$.
D'après la question 1.b., le noyau de la trace de f est de dimension 3 :

$$\underbrace{\mathrm{Ker(tr)}}_{\mathrm{dim}=3} \subset \mathrm{E}_f(1) \subset \underbrace{\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})}_{\mathrm{dim}=4}.$$

Ceci donne l'encadrement :

$$3 \leq \dim \mathrm{E}_f(1) \leq 4$$

et il y a donc a priori deux possibilités pour la dimension de $\mathrm{E}_f(1)$:

— $\dim \mathrm{E}_f(1) = 3$: dans ce cas, l'inclusion $\mathrm{Ker(tr)} \subset \mathrm{E}_f(1)$ est en fait une égalité ;
— $\dim \mathrm{E}_f(1) = 4$: dans ce cas, l'inclusion $\mathrm{E}_f(1) \subset \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ est en fait une égalité, ce qui signifie que f est égale à l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Ainsi par exemple, $f(E_1) = E_1 + \mathrm{tr}(E_1)J = E_1 + J$ et $f(E_1) = E_1$, donc $J = 0$ ce qui contredit l'énoncé.

Par conséquent, on est dans le premier cas :

$$\mathrm{E}_f(1) = \mathrm{Ker(tr)} \quad \text{et donc} \quad \dim \mathrm{E}_f(1) = 3.$$

(b) On calcule l'image de J par f :

$$f(J) = J + \mathrm{tr}(J)J = \big(1 + \mathrm{tr}(J)\big)J$$

donc J est vecteur propre de f associé à la valeur propre $1 + \mathrm{tr}(J)$.

Si $\mathrm{tr}(J) = 0$, c'est la valeur propre 1 ; sinon, c'est une deuxième valeur propre. Il faut bien avoir compris ceci pour les questions suivantes.

(c) i. En supposant que $\mathrm{tr}(J) \neq 0$, nous avons donc trouvé deux valeurs propres *distinctes* pour f : 1 et $1 + \mathrm{tr}(J)$.

Par ailleurs, $\dim \mathrm{E}_f(1) = 3$ d'après 4.a.
Or, par le cours :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim \mathrm{E}_f(\lambda) \leq 4$$

avec égalité si et seulement si f est diagonalisable.
Cette somme comporte les deux termes $\dim \mathrm{E}_f(1)$ $(= 3)$ et $\dim \mathrm{E}_f(1+\mathrm{tr}(J))$ (≥ 1), ce qui prouve qu'il n'y a pas d'autre valeur propre et qu'il y a égalité partout :

$$\underbrace{\dim \mathrm{E}_f(1)}_{=3} + \underbrace{\dim \mathrm{E}_f(1 + \mathrm{tr}(J))}_{=1} = 4.$$

En résumé :

— f est diagonalisable,
— $\mathrm{Sp}(f) = \{1,\ 1 + \mathrm{tr}(J)\}$,
— $\mathrm{E}_f(1) = \mathrm{Ker(tr)}$ et $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)$ en est une base d'après 1.b.,

— $E_f(1+\mathrm{tr}(J))$ est de dimension 1 et contient la matrice non nulle J qui en forme donc une base.

ii. On suppose que $\mathrm{tr}(J)=0$, que f admet une valeur propre λ différente de 1 et que M est un vecteur propre associé. Alors :

$$f(M) = M + \mathrm{tr}(M)J = \lambda M.$$

Appliquons la trace à cette dernière égalité :

$$\mathrm{tr}\big(M + \mathrm{tr}(M)J\big) = \mathrm{tr}(\lambda M).$$

La trace étant linéaire d'après 1.a. :

$$\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(M)\underbrace{\mathrm{tr}(J)}_{=0} = \lambda \mathrm{tr}(M)$$

et donc :

$$(1-\lambda)\mathrm{tr}(M) = 0.$$

Comme $\lambda \neq 1$, on en déduit : $\mathrm{tr}(M) = 0$.

Par conséquent $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{E}_f(1)$.
Or, les sous-espaces propres d'un endomorphisme (ou d'une matrice) sont d'intersections deux-à-deux nulles :

$$M \in \mathrm{E}_f(1) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \{0\}$$

ce qui implique $M = 0$: c'est absurde car un vecteur propre n'est pas nul par définition.

En conclusion, si $\mathrm{tr}(J)=0$, alors il n'existe pas d'autre valeur propre que 1 :

$$\mathrm{Sp}(f) = \{1\}.$$

Une autre solution, plus simple, mais qui ne correspondait pas à la manière dont est décomposée la question (notons id *l'application identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$) :*

$$\forall N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad (f-\mathrm{id})(N) = \mathrm{tr}(N)J$$

(N est quelconque, pas nécessairement vecteur propre de f), donc :

$$(f-\mathrm{id})^2(N) = (f-\mathrm{id})\big(\mathrm{tr}(N)J\big) = \mathrm{tr}(N)\big(f(J)-J\big) = \mathrm{tr}(N)\underbrace{\mathrm{tr}(J)}_{=0}J = 0.$$

Ainsi, $(X-1)^2$ est un polynôme annulateur de f, ce qui prouve que f n'admet pas d'autre valeur propre que 1.

iii. D'après la question précédente, si $\mathrm{tr}(J)=0$, alors f admet une unique valeur propre (1) avec un sous-espace propre de dimension 3 (d'après 4.a.), donc f n'est pas diagonalisable.
Si au contraire $\mathrm{tr}(J)\neq 0$, alors f est diagonalisable d'après 4.a.i.
En conclusion :

$$f \text{ est diagonalisable} \iff \mathrm{tr}(J) \neq 0.$$

(d) Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est bijectif si et seulement s'il n'admet pas 0 comme valeur propre.
Comme $1+\mathrm{tr}(J)$ est la seule valeur propre de f éventuellement différente de 1 :

$$f \text{ est bijective} \iff 0 \notin \mathrm{Sp}(f) \iff 1+\mathrm{tr}(J) \neq 0 \iff \mathrm{tr}(J) \neq -1.$$

*
* *

Un très bel exercice d'algèbre linéaire. Les questions s'enchaînent bien et la difficulté est progressive, avec un début d'exercice usuel et une dernière partie théorique plutôt délicate.

L'énoncé aurait pu demander d'admettre la linéarité de f car cela fait un peu doublon avec la question 1.a.
Le calcul de A^{-1} en 3.d. est hors-sujet mais permet de tester les candidats sur ce point du programme de première année.
La question 4.c.ii. est particulièrement difficile si l'on n'a jamais vu l'astuce utilisée.

Exercice 3

Partie A

1. La continuité de f sur $]-\infty;0[\cup]0;1[$ est claire au vu de l'expression sur cet ensemble. On vérifie la continuité de f en 0 avec l'équivalent classique $\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\sim} 1-t$:

$$\frac{-\ln(1-t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-(1-t)}{t} = 1 \quad \text{donc} \quad f(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1 = f(0).$$

La fonction f est donc continue sur $]-\infty;1[$.

2. (a) Étudions les variations de la fonction $g : \begin{cases}]-\infty;1[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t}{1-t} + \ln(1-t) \end{cases}$.

Elle est dérivable avec :

$$\forall t < 1, \quad g'(t) = \frac{(1-t)+t}{(1-t)^2} + \frac{-1}{1-t} = \frac{1-(1-t)}{(1-t)^2} = \frac{t}{(1-t)^2}$$

d'où son tableau de variations :

x	$-\infty$		0		1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Il n'est pas nécessaire de calculer les limites de g en $-\infty$ et en 1^- (elles valent $+\infty$).

On en déduit que la fonction g est positive, c'est-à-dire :

$$\forall t < 1, \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \geq 0.$$

(b) L'expression définissant f est clairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur les deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$.
Pour tout $t \in]-\infty;0[\cup]0;1[$:

$$f'(t) = \frac{\dfrac{1}{1-t} \times t + \ln(1-t)}{t^2} = \frac{g(t)}{t^2}.$$

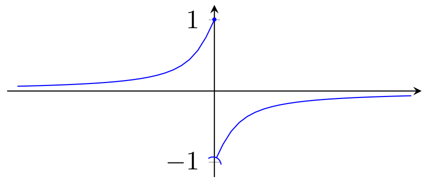
(c) Comme g est positive, on obtient :

$$\forall]-\infty;0[\cup]0;1[, \quad f'(t) \geq 0.$$

La fonction f est donc croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0[$ et $]0;1[$.
Comme de plus, f est continue en 0, on obtient que f est croissante sur $]-\infty;1[$.

Il est important ici de rappeler la continuité de f.

Exemple d'une fonction continue sur $\mathbb{R}^*$, croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$, mais pas croissante sur $\mathbb{R}^*$.



3. (a) Le cours nous donne :

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right).$$

En remplaçant t par $-t$:

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right).$$

(b) Il existe donc une fonction $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t).$$

On a donc :

$$\frac{-\ln(1-t)}{t} = 1 + \frac{t}{2} - t\varepsilon(t).$$

Ainsi, la fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0, ce qui prouve qu'elle est dérivable en 0 avec $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.

(c) Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;0[\cup]0;1[$ et dérivable en 0, il reste à montrer que f' est continue en 0.
On reprend l'expression de $f'(t)$ calculée en 2.b. :

$$\forall t \in]-\infty;0[\cup]0;1[, \quad f'(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{1-t} + \ln(1-t)\right)$$

Utilisons le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-t)$ (déterminé en 3.b.) ainsi que celui, connu, de $\dfrac{1}{1-t}$ en 0 à l'ordre 1.
Il existe ε et ζ, fonctions qui tendent vers 0 en 0, telles que :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t) \quad ; \quad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t\zeta(t)$$

On obtient :

$$f'(t) = \frac{1}{t^2}\left(t\big(1+t+t\zeta(t)\big) + -t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)\right)$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(t + t^2 + t^2\zeta(t) - t - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)\right)$$
$$= \frac{1}{t^2}\left(\frac{t^2}{2} + t^2\big(\varepsilon(t)+\zeta(t)\big)\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\varepsilon(t)}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\zeta(t)}_{\underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = f'(0).$$

On a ainsi prouvé la continuité de f' en 0.
Finalement, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty;1[$.

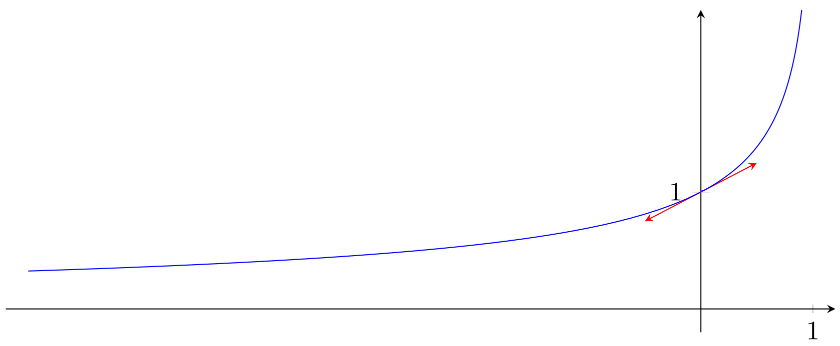
4. — Limite de f en $-\infty$.
Par croissances comparées, $\ln(u) = \underset{u\to+\infty}{\mathrm{o}}(u)$ donc $\ln(u) = \underset{u\to+\infty}{\mathrm{o}}(1-u)$. Ainsi :

$$\ln(1-t) = \underset{t\to-\infty}{\mathrm{o}}(t) \quad \text{donc} \quad f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0.$$

— Limite de f en 1.
On a $\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\longrightarrow} -\infty$ donc :

$$f(t) = -\frac{\ln(1-t)}{t} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty \qquad \left(\text{de la forme « } \frac{+\infty}{1} \text{ »}\right).$$

5.



Partie B

6. La fonction L est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction continue f, donc est de classe $\mathcal{C}^1$ avec :

$$\forall x < 1, \quad L'(x) = f(x).$$

7. (a) Soient $A, B \in]0;1[$. On effectue le changement de variable $u = 1-t$:

$$\int_A^B f(t)\mathrm{d}t = \int_A^B \frac{-\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t = \int_{1-A}^{1-B} \frac{-\ln(u)}{1-u}(-\mathrm{d}u) = \int_{1-A}^{1-B} \frac{\ln(u)}{1-u}\mathrm{d}u.$$

(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0;1[$.
On utilise la formule donnant la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^n t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

et on multiplie chaque membre de cette égalité par $-\ln(t)$:

$$\frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^n -t^k\ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$$

(c) Soient $x \in]0;1]$.
Les fonctions u et v définies sur le segment $[x;1]$ par :

$$\forall t \in [x;1], \quad u(t) = -\frac{t^{k+1}}{k+1} \quad \text{et} \quad v(t) = \ln(t)$$

sont de classe $\mathcal{C}^1$. Leurs dérivées sont données par :

$$\forall t \in [x;1], \quad u'(t) = -t^k \quad \text{et} \quad v(t) = \frac{1}{t}$$

D'après la formule d'intégration par parties :

$$\int_x^1 -t^k\ln(t)\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln(t)\right]_x^1 + \int_x^1 +\frac{t^{k+1}}{k+1}\times\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) + \frac{1}{k+1}\int_x^1 t^k\mathrm{d}t$$
$$= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) + \frac{1}{k+1}\left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_x^1$$
$$= \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln(x) + \frac{1}{(k+1)^2}\left(1-x^{k+1}\right)$$

Par croissances comparées, $x^{k+1}\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. On a aussi $x^{k+1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$.
On obtient alors :

$$\int_0^1 -t^k\ln(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

(d) Notons $h : t \mapsto \dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$.

— En 0^+ : le numérateur tend vers 0 (croissances comparées) et le dénominateur vers 1, donc :

$$h(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0.$$

— En 1^- : avec l'équivalent $\ln(t) = \ln\left(1+(t-1)\right) \underset{t\to 1^-}{\sim} t-1$ (puisque $t - 1 \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 0$), on a :

$$h(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \frac{-t(1-t)}{t-1} = t \quad \text{donc} \quad h(t) \underset{t\to 1^-}{\longrightarrow} 1.$$

La fonction h est clairement continue sur $]0;1[$.
Comme elle admet des limites finies aux bornes de cet intervalle, elle est prolongeable par continuité en 0 et en 1, donnant ainsi un prolongement $\hat{h}$ continu sur le segment $[0;1]$.
Or, toute fonction continue sur un segment est bornée.
Par conséquent, $\hat{h}$ est bornée sur $[0;1]$ et donc h est bornée sur $]0;1[$.

Comme h est en fait positive sur $]0,1[$, on peut écrire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \,]0;1[\,, \quad 0 \leq h(t) \leq M$$

d'où, en multipliant par t^n (≥ 0) :

$$\forall t \in \,]0;1[\,, \quad 0 \leq \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t} \leq Mt^n$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$ est continue et positive sur $]0;1[$; elle est majorée par une fonction intégrable entre 0 et 1. On en déduit qu'elle est elle-même intégrable entre 0 et 1, et par croissance de l'intégrale :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 Mt^n\mathrm{d}t = \underbrace{\frac{M}{n+1}}_{\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0}.$$

Enfin, par le théorème d'encadrement :

$$\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(e) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 7.b. :

$$\forall t \in \,]0;1[\,, \quad \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k\ln(t) + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}.$$

D'après 7.c. et 7.d., les intégrales

$$\int_0^1 -t^k\ln(t)\mathrm{d}t \text{ (pour tout } k\in\mathbb{N}) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$$

convergent.
Il en est donc de même de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$; en intégrant sur $]0;1[$ chaque membre de l'égalité de 7.b. et en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n}\int_0^1 -t^k\ln(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \qquad \text{(avec 7.c.)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} + 0 = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2} \qquad \text{(avec 7.d.)}\end{aligned}$$

Le nombre $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ ne dépendant pas de n, il est égal à cette limite :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(k+1)^2}.$$

(f) Soit $x \in \,]0;1[$. Avec $B = x$ dans la question 7.a. :

$$\int_A^x f(t)\mathrm{d}t = \int_{1-x}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \underset{A\to 0^+}{\longrightarrow} \int_{1-x}^{1} \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant bien convergente d'après la question précédente.
Donc :

$$L(x) = \int_{1-x}^{1} \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\mathrm{d}t$$

avec la même justification.
On en déduit :

$$L(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui prouve que L est prolongeable par continuité en 1 en posant $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

8. (a) D'après la question 6., L est dérivable sur $]-\infty;1[$.
Or, pour tout $x \in \,]-1;0[\,\cup\,]0;1[$, les nombres x, $-x$ et x^2 sont dans cet intervalle $]-\infty;1[$.
Avec les règles de dérivabilité des sommes et composées, la fonction $x \mapsto L(x) + L(-x) + L\left(x^2\right)$ est dérivable sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$.
En utilisant la dérivée de L donnée en 6. (c'est f) et la formule de dérivation pour une composée :

$$\forall x \in \,]-1;0[\,\cup\,]0;1[\,, \quad \left(L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L\left(x^2\right)\right)' = f(x) - f(-x) - xf\left(x^2\right).$$

(b) On utilise l'expression de f donnée en début d'exercice ; pour $x \in]-1;0[\cup]0;1[$:

$$\begin{aligned}
f(x)-f(-x)-xf\left(x^2\right) &= \frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}-x\times\frac{\ln\left((1-x)^2\right)}{x^2}\\
&= \frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln\left((1-x)(1+x)\right)}{x}\\
&= \frac{-\ln(1-x)}{x}+\frac{\ln(1+x)}{x}-\frac{\ln(1-x)+\ln(1+x)}{x}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Ainsi la fonction $x\mapsto L(x)+L(-x)-\frac{1}{2}L\left(x^2\right)$ est de dérivée nulle sur $]-1;0[\cup]0;1[$ donc est constante sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$.
Cette fonction étant de plus continue en 0 * (car L l'est), elle est en fait constante sur $]-1;1[$.
Enfin, cette fonction est continue sur $[-1;1]$ (car L est continue en -1 et en 1) et y est donc constante.

La valeur de cette constante est 0 car $L(0)=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0$.

En conclusion :

$$\forall x\,[-1;1],\quad L(x)+L(-x)=\frac{1}{2}L\left(x^2\right).$$

(* On notera que, lorsqu'une fonction est constante sur un ensemble de la forme $I\setminus\{a\}$ où I est un intervalle et a un élément de I qui n'est pas une borne, la constante sur chaque « morceau » n'est pas la même a priori, sauf s'il y a continuité en a de la fonction.)

(c) En appliquant ceci à $x=1$ (ou $x=-1$ au choix) :

$$L(1)+L(-1)=\frac{1}{2}L(1)\quad\text{donc}\quad L(-1)=-\frac{1}{2}L(1)=-\frac{\pi^2}{12}.$$

Partie C

9. (a) Soient $x,y\in]-\infty;0[$. Avec $L'=f$, on utilise la formule permettant de dériver une composée :

$$\begin{cases}\partial_1(\Phi)(x,y) &= f(x)+yf(-xy)\\ \partial_2(\Phi)(x,y) &= f(y)+xf(-xy)\end{cases}$$

(b) On cherche les points $(x,y)\in]-\infty;0[^2$ en lesquels ces deux dérivées s'annulent :

$$\begin{aligned}
\begin{cases}f(x)+yf(-xy)&=0\\ f(y)+xf(-xy)&=0\end{cases} &\iff \begin{cases}-\ln(1-x)+\ln(1+xy)&=0\\ -\ln(1-y)+\ln(1+xy)&=0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}1-x&=1+xy\\ 1-y&=1+xy\end{cases}\quad(\ln\text{ est injective})\\
&\iff \begin{cases}y&=-1\\ x&=-1\end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que Φ admet un unique point critique : $(-1,-1)$.

10. (a) Pour tout $x,y\in]-\infty;0[$:

$$\nabla^2(\Phi)(x,y)=\begin{pmatrix}f'(x)-y^2f'(-xy) & f(-xy)-xyf'(-xy)\\ f(-xy)-xyf'(-xy) & f'(y)-x^2f'(-xy)\end{pmatrix}$$

donc, pour $x=y=-1$:

$$\nabla^2(\Phi)(-1,-1)=\begin{pmatrix}\overbrace{f'(-1)-f'(-1)}^{=0} & f(-1)-f'(-1)\\ f(-1)-f'(-1) & \underbrace{f'(-1)-f'(-1)}_{=0}\end{pmatrix}.$$

Or :

$$f(-1)=\frac{-\ln(1-(-1))}{-1}=\ln 2$$

et avec l'expression de f' calculée en question 2.b. :

$$f'(-1)=\frac{\frac{1}{1-(-1)}\times(-1)+\ln\left(1-(-1)\right)}{(-1)^2}=-\frac{1}{2}+\ln 2.$$

On obtient :

$$H=\nabla^2(\Phi)(-1,-1)=\begin{pmatrix}0 & \ln 2+\frac{1}{2}-\ln 2\\ \ln 2+\frac{1}{2}-\ln 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}.$$

(b) Pour $\lambda\in\mathbb{R}$:

$$\mathrm{rg}(H-\lambda I_2)=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-\lambda & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\lambda\end{pmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\lambda\\ -\lambda & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2+2\lambda L_1}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\lambda\\ 0 & \frac{1}{2}-2\lambda^2\end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de H sont les réels λ tels que :

$$\frac{1}{2}-2\lambda^2=0\iff\lambda^2=\frac{1}{4}\iff\lambda=\pm\frac{1}{2}.$$

11. La matrice hessienne de Φ au point critique $(1,1)$ admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés. Par conséquent, Φ admet en $(1,1)$ un point col (qui n'est donc pas un extremum local).

Puisque Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]-\infty;0[^2$, tout autre extremum local serait un point critique. Puisqu'elle n'admet pas d'autre point critique que $(-1,-1)$, Φ n'admet aucun extremum local sur $]-\infty;0[^2$.

$$*$$
$$* \quad *$$

Un exercice bien construit, qui couvre une partie assez large du programme sur les fonctions d'une ou deux variables réelles. Mais il est difficile et demande d'être précis.

La partie A est tout-à-fait abordable même si les calculs de développements limités en question 3. sont à la limite du programme.
La partie B demande beaucoup de finesse. On peut être par ailleurs facilement perdu dans la manière dont s'enchaînent les sous-questions en 7. : il faut en fait comprendre que les questions 7.a., 7.b., 7.c. et 7.d. sont indépendantes, et ce n'est qu'en question 7.e. qu'on fait le lien avec elles.
La partie C est assez classique.

La fonction L est appelée « fonction dilogarithme ». Elle vérifie :

$$\forall x \in [-1;1], \quad L(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

(ce qui est prouvé pour $x = 1$ en question 7.).

L'énoncé nous donne beaucoup d'éléments pour pouvoir en donner une belle représentation graphique. Ceci aurait pu être demandé, en donnant quelques valeurs approchées ($\ln(2) \approx 0.69$ et $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1.64$).
Notons $\mathcal{C}_L$ la courbe représentative de L dans un repère orthogonal de $\mathbb{R}^2$.
Nous savons que :

— L est strictement croissante, puisque dérivable sur $]-\infty;1[$ de dérivée $f \geq 0$.

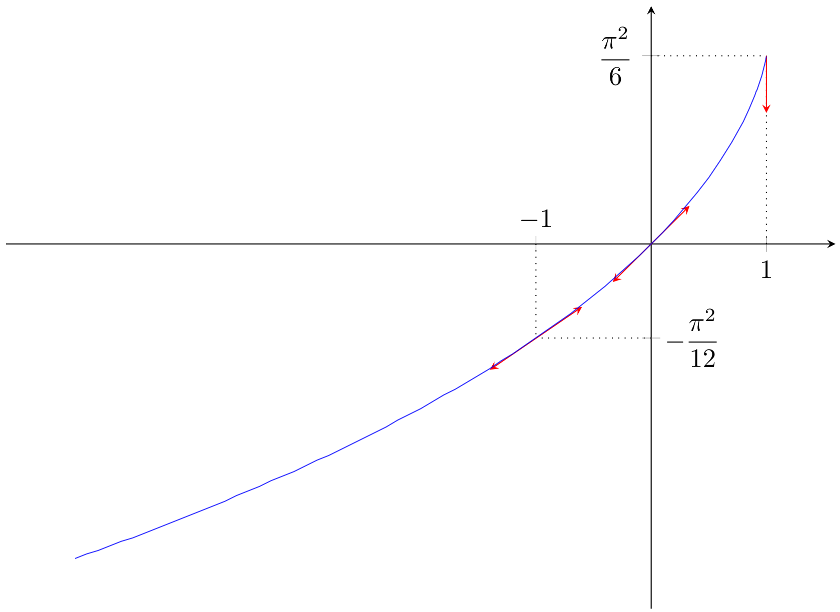
— L est convexe. En effet, f étant de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction L est en fait de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\infty;1[$ de dérivée seconde $f' \geq 0$.

— $L(0) = 0$. Et comme $f(0) = 1$, la tangente à $\mathcal{C}_L$ en $(0,0)$ a pour équation $y = x$.

— $L(-1) = -\dfrac{\pi^2}{12}$. Et comme $f(-1) = \ln(2)$, la tangente à $\mathcal{C}_L$ en $(0,0)$ a pour équation $y = \ln(2)x + \ln(2) - \dfrac{\pi^2}{12}$.

— $L(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $L'(x) = f(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} +\infty$, donc $\mathcal{C}_L$ admet en $\left(1, \dfrac{\pi^2}{6}\right)$ une demi-tangente verticale.

Représentation graphique de la fonction L :



Enfin, la surface $z = \Phi(x,y)$ avec le point col en $(-1,-1)$: